Об одном степенном ряде

У. К. Хейман

1. А. А. Гольдберг предложил мне задачу: исследовать поведение коэффициентов ряда

$$f(z) = \exp\left\{\sum_0^\infty z^{2^\nu}\right\} = \sum_0^\infty a_n z^n \tag{0}$$

и высказал, в частности, предположение, что отношения a_{n+1}/a_n ограничены сверху и снизу положительными постоянными. Эта гипотеза оказалась верной, поскольку мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Предположим, что коэффициенты a_n заданы равенством* (0). *Тогда при $n \geqslant 1$ справедливо:*

(I) $\quad a_n \geqslant 1;$

(II) $\quad \dfrac{2}{3} < \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}} < \dfrac{11}{12};$

(III) $\quad \dfrac{48}{47} < \dfrac{a_{2n}}{a_{2n-1}} < \dfrac{7}{2};$

(IV) *если*

$$\lambda_1 = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{\log n}$$

и

$$\lambda_2 = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{\log n},$$

то

$$\frac{\log \operatorname{sh} 1}{\log 2} = 0,233\ldots \leqslant \lambda_1 < \frac{\log 1{,}27}{\log 2} = 0{,}345\ldots$$

и

$$\frac{1}{\log 2} - 1 = 0{,}443\ldots \leqslant \lambda_2 \leqslant \frac{\log \operatorname{ch} 1}{\log 2} = 0{,}626\ldots$$

2. Рекуррентная формула для a_n и доказательство неравенства (I). Заметим, что из (0) следует

$$f(z) = e^z f(z^2),$$

стало быть,

$$\sum_0^\infty a_n z^n = \left(\sum_0^\infty a_n z^{2n}\right)\left(\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}\right).$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в этом равенстве, мы видим, что

$$a_{2k} = a_k + \frac{a_{k-1}}{2!} + \frac{a_{k-2}}{4!} + \ldots + \frac{1}{(2k)!} \tag{1}$$

и

$$a_{2k+1} = a_k + \frac{a_{k-1}}{3!} + \frac{a_{k-2}}{5!} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)!}. \tag{2}$$

Из этих равенств можно вычислить несколько первых коэффициентов:

$$a_0 = a_1 = 1,\ a_2 = 1\frac{1}{2},\ a_3 = 1\frac{1}{6},\quad a_4 = 2\frac{1}{24},\quad a_5 = 1\frac{27}{40}, \ldots.$$

Из (1) и (2) ясно, что $a_{2k} \geqslant a_k$ и $a_{2k+1} \geqslant a_k$. Так как $a_0 = a_1 = 1$, то отсюда сразу вытекает (I). Этот результат был раньше получен А. А. Гольдбергом.

3. Оценки снизу для a_{n+1}/a_n. Сначала мы получим нижние границы в оценках (II) и (III) в нашей теореме. Допустим, что результаты справедливы при $n < k$, и докажем их при $n = k$. Поскольку ясно, что неравенства выполняются при $n = 1$, отсюда будет следовать общее утверждение. Мы используем также неравенство

$$a_{2k+1} < a_{2k}, \tag{3}$$

которое сразу следует из (1) и (2). Из (1) — (3) и предположения индукции мы получаем при $k \geqslant 2$, что

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} > \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{6} + \frac{a_{k-2}}{120} + \ldots}{a_k + \frac{a_{k-1}}{2} + \frac{a_{k-2}}{24}\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{5\cdot 6} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \ldots\right)} >$$

$$> \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{6} + \frac{a_{k-2}}{120}}{a_k + \frac{a_{k-1}}{2} + \frac{a_{k-2}}{24\left(1 - \frac{1}{20}\right)}}.$$

Очевидно, что дробь в правой части неравенства убывает с ростом a_{k-1} и a_{k-2} при $0 < a_{k-1} \leqslant \frac{3}{2}a_k$, $0 < a_{k-2} \leqslant \frac{3}{2}a_k$. Значит, в этом промежутке минимум достигается при $a_{k-2} = a_{k-1} = \frac{3}{2}a_k$. Принимая во внимание (II) и (III) при $n < k$, получаем

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} > \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{80}\right) \Big/ \left(1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{76}\right) > \frac{2}{3}.$$

Тем самым доказана левая часть неравенства (II). Теперь из (1), (2) и левой части неравенства (II) мы имеем

$$a_{2k} - a_{2k-1} \geqslant \left(a_k + \frac{1}{2}a_{k-1} + \frac{1}{24}a_{k-2}\right) -$$

$$-\left(a_{k-1} + \frac{1}{6}a_{k-2} + \frac{1}{120}a_{k-3} + \ldots\right) >$$

$$> a_k - \frac{1}{2}a_{k-1} - \frac{1}{8}a_{k-2} - \frac{1}{120}a_{k-3}\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{6\cdot 7} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} + \ldots\right);$$

$$a_{2k} - a_{2k-1} > a_k - \frac{1}{2}a_{k-1} - \frac{1}{8}a_{k-2} - \frac{28}{27\cdot 120}a_{k-3}. \tag{4}$$

Допустим сначала, что k нечетно. Тогда $k - 1$ четно и по предположению

$$a_{k-2} < a_{k-1}, \quad a_{k-3} < \frac{3}{2}a_{k-2} < \frac{3}{2}a_{k-1}.$$

Следовательно,

$$a_{2k} - a_{2k-1} > a_k - a_{k-1}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{3}{2}\,\frac{28}{27\cdot 120}\right] > a_k - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{36}\right)a_{k-1} =$$

$$= \frac{a_k}{24} + \left[\left(1 - \frac{1}{24}\right) a_k - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{36}\right) a_{k-1}\right] > \frac{a_k}{24}, \tag{5}$$

так как $a_k > \frac{2}{3} a_{k-1}$ по предположению.

С другой стороны, если k четно, то по предположению

$$a_{k-1} < a_k \text{ и } a_{k-3} < a_{k-2} < \frac{3}{2} a_{k-1} < \frac{3}{2} a_k.$$

Таким образом, в этом случае получаем из (4), что

$$a_{2k} - a_{2k-1} > a_k \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{16} - \frac{3 \cdot 28}{2 \cdot 27 \cdot 120}\right) > \frac{a_k}{4}. \tag{6}$$

Кроме того, в любом случае

$$a_{2k} = a_k + \frac{1}{2} a_{k-1} + \frac{1}{24} a_{k-2} + \ldots <$$

$$< a_k \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{2!} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{4!} + \ldots\right) < 2a_k.$$

Следовательно, из (5) и (6) вытекает

$$a_{2k} - a_{2k-1} > \frac{a_{2k}}{48},$$

что доказывает левую часть неравенства (III).

4. Оценки сверху для a_{k+1}/a_k. Далее мы докажем правую часть неравенств в (II) и (III). Заметим, что в силу (1) и (2)

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{2!} + \frac{a_{k-2}}{4!} + \ldots}{a_{k-1} + \frac{a_{k-2}}{3!} + \ldots} < \frac{a_k}{a_{k-1} + \frac{1}{6} a_{k-2}} + \frac{1}{2}, \quad k \geqslant 3.$$

Если k нечетно, то в силу (3) $a_{k-1} > a_k$, и мы сразу получаем, что

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Если k четно, то в силу (3) $a_{k-2} > a_{k-1}$, и мы находим, что

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} < \frac{6}{7} \frac{a_k}{a_{k-1}} + \frac{1}{2} < 3\frac{1}{2}, \text{ если } \frac{a_k}{a_{k-1}} < 3\frac{1}{2},$$

что является допущением индукции. Тем самым доказательство (III) завершено.

Чтобы доказать правую часть неравенства (II), положим $\eta = \frac{12}{11}$ и заметим, что

$$a_{2k} - \eta a_{2k+1} = (1 - \eta) a_k + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\eta}{3}\right) a_{k-1} + \frac{1}{4!}\left(1 - \frac{\eta}{5}\right) a_{k-2} + \ldots >$$

$$> \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\eta}{3}\right) a_{k-1} - (\eta - 1) a_k = \frac{7}{22} a_{k-1} - \frac{1}{11} a_k > 0,$$

в силу правой части неравенства (III) и (3). Тем самым доказательство (II) завершено.

5. Доказательство неравенств (IV). Рассмотрим, наконец,

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2^n} = \log f(r), \quad 0 < r < 1.$$

Обозначая через $[x]$ целую часть x, видим, что

$$\frac{1}{1-r}\varphi(r) = \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{\log(2n)}{\log 2}\right] r^n =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\sum_{1}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + O(1)\right] r^n =$$

$$= \frac{1}{\log 2}\,\frac{1}{1-r}\left\{\log\frac{1}{1-r} + O(1)\right\}, \quad 0 < r < 1$$

Поэтому

$$\varphi(r) = \log f(r) = \frac{1}{\log 2}\log\frac{1}{1-r} + O(1), \quad 0 < r < 1,$$

следовательно, функция

$$(1-r)^{1/\log 2} f(r)$$

ограничена сверху и снизу положительными постоянными при $0 < r < 1$.

Заметим, что

$$(1-r)^{-\frac{1}{\log 2}} = \sum_{0}^{\infty} b_n r^n,$$

где

$$b_n \sim c n^{(1/\log 2)-1} \text{ при } n \to \infty,$$

а c — некоторая постоянная. Отсюда следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n} > 0 \text{ и } \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{b_n} < \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Значит,

$$\lambda_1 \leqslant \frac{1}{\log 2} - 1 \leqslant \lambda_2. \tag{7}$$

Далее мы получим более точную оценку сверху для λ_1. С этой целью выберем последовательность натуральных чисел n_k, такую, что $n_{k+1} = 2n_k + 1$, $k = 1, 2, \ldots,$ стало быть, $n_k = 2^{k-1}(n_1 + 1) - 1$. Опуская индекс k у n_k, видим, что для каждого такого n, в силу (2) и левых частей неравенств (II) и (III), выполняется

$$a_{2n+1} = a_n + \frac{1}{3!}a_{n-1} + \frac{1}{5!}a_{n-2} + \ldots < a_n\left(1 + \frac{1}{3!}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{5!}\left(\frac{3}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{7!}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \ldots\right) < a_n\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{80} + \frac{3}{7!}\right) < 1{,}27a_n.$$

Отсюда

$$a_{n_k} < (1{,}27)^{k-1} a_{n_1}.$$

Таким образом,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log a_n}{\log n} \leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log a_{n_k}}{\log n_k} \leqslant \frac{\log(1{,}27)}{\log 2} = 0{,}345\ldots \tag{8}$$

Этот результат показывает, если учесть (II) и (III), что если n имеет вид $a2^k + b$, где a и b — фиксированные натуральные числа, то последовательность a_n сравнительно медленно стремится к ∞ при $n \to \infty$.

Чтобы получить для λ_1 оценку снизу, предположим, что k велико и что

$$a_n \geqslant cn^\lambda, \quad n = 1, 2, \ldots, k. \tag{9}$$

Тогда в силу (2) имеем

$$a_{2n+1} \geqslant cn^\lambda \left[1 + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\lambda + \frac{1}{5!}\left(1 - \frac{2}{n}\right)^\lambda + \frac{1}{7!}\left(1 - \frac{3}{n}\right)^\lambda + \ldots\right] >$$

$$> (1 - \varepsilon)\, cn^\lambda \operatorname{sh} 1, \quad n \leqslant k \leqslant 2n + 1,$$

если k больше некоторой величины, зависящей от ε. Аналогично

$$a_{2n} \geqslant (1 - \varepsilon)\, cn^\lambda \operatorname{ch} 1.$$

Отсюда получаем

$$a_m > cm^\lambda, \quad k < m \leqslant 2k + 1,$$

предполагая, что

$$\operatorname{sh} 1 > 2^\lambda \tag{10}$$

и $k \geqslant k_0(\lambda)$. Предположим, что (10) выполняется, и выберем c столь малым, что (9) выполняется при $n \leqslant k_0(\lambda)$. Тогда (9) остается в силе для всех n и этой постоянной c. Поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{\log n} \geqslant \frac{\log \operatorname{sh} 1}{\log 2} = 0{,}233\ldots \tag{11}$$

Это дает оценку снизу для λ_1 в (IV).

Аналогично получаем, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{\log n} \leqslant \frac{\log \operatorname{ch} 1}{\log 2} = 0{,}626\ldots, \tag{12}$$

что дает оценку сверху для λ_2 в (IV).

С учетом (7), (8), (11) и (12) это завершает доказательство (IV), и наша теорема полностью доказана.

Отметим, что (8) дает нам информацию о последовательности n, при которых порядок роста a_n ниже среднего. Было бы интересно выяснить, имеет ли место неравенство $\lambda_2 > (\log 2)^{-1} - 1$, и в случае положительного ответа — для каких последовательностей n порядок a_n выше «среднего» порядка $(\log 2)^{-1} - 1$.

Поступила 17.I 1967 г.
Лондон, Имперский колледж