Следует указать, что собственные значения матрицы A заданной системы таковы:

$$\lambda_1 = -0{,}001,\ \lambda_2 = 0{,}98,\ \lambda_3 = 8{,}4.$$

Матрица A является плохо обусловленной: для нее число обусловленности H равно

$$H = \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{2347{,}54195}{0{,}189038320 \cdot 10^{-5}}} \approx 35240;$$

здесь μ_i — собственные значения матрицы $A'A$.

Плохой обусловленностью матрицы объясняется и результат, полученный при решении заданной системы методом Гаусса с выбором главного элемента, а именно:

$$x_1 = 20{,}0002126;\ x_2 = 12{,}0001062;\ x_3 = 31{,}0003188.$$

Как видим, применение описанного итерационного процесса позволяет вычислить решение плохо обусловленной системы более точно.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений, УМН, т. XV, вып. 3, 1960.
2. Ю. Л. Далецкий, Об асимптотическом решении одного векторного дифференциального уравнения, ДАН СССР, т. 92, № 5, 1953.
3. В. Н. Кублановская, О вычислении обобщенной обратной матрицы и проектора, ЖВММФ, т. 6, № 2, 1966.

Поступила 30.XII 1965 г.
Институт кибернетики АН УССР

К вопросу распределения температурного поля в полуограниченной составной пластине при наличии движущегося точечного источника

В. Г. Петренко

Рассмотрим линейный поток тепла в узкой и тонкой составной пластине бесконечной длины $x \geqslant 0$ при отсутствии теплообмена на ее поверхности и при наличии точечного источника тепла постоянной мощности A_0, движущегося в направлении оси x с постоянной скоростью u. Влияние температурного режима, заданного на границе отдаленного конца, в центральной части пластины сказывается весьма слабо, и температура практически определяется температурным режимом близкого конца и начальными условиями. Конец пластины $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре. Область $0 \leqslant x \leqslant a$ содержит материал с параметрами k_1, ϱ_1, c_1, $\varkappa_1$ и температурой $T_1(x, t)$, а область $x \geqslant a$ — другой материал с параметрами k_2, ϱ_2, c_2, $\varkappa_2$ и температурой $T_2(x, t)$. На границе соприкосновения $x = a$ отсутствует тепловое сопротивление. Начальная температура равна нулю. Пластина тонкая и узкая, причем настолько, что изменением температуры относительно y и z можно пренебречь.

Мы имеем первую краевую задачу для полуограниченной области. Существенным требованием здесь является ограниченность искомой функции $T(x, t)$ во всей области $x \geqslant 0$, т. е. существование такого M, что $|T(x, t)| \leqslant M$ для всех значений x. Температура на бесконечности исчезает.

Необходимо найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\varkappa(x)}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{A_0}{k(x)}\delta(x-ut), \qquad x \geqslant 0,\ t > 0; \tag{1}$$

$$T(x,\ t) = \begin{cases} T_1(x,\ t) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ T_2(x,\ t) & \text{при } \qquad x \geqslant a, \end{cases}$$

$$\varkappa(x) = \begin{cases} \varkappa_1 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a \\ \varkappa_2 & \text{при } \qquad x \geqslant a \end{cases}, \quad k(x) = \begin{cases} k_1 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ k_2 & \text{при } \qquad x \geqslant a, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному и краевому условиям

$$T(x,\ t) = 0,\ x \geqslant 0,\ t = 0, \qquad T(x,\ t) = 0,\ x = 0,\ t > 0, \tag{2}$$

и условиям сопряжения

$$T(x,\ t)|_{x=a-0} = T(x,\ t)|_{x=a+0}, \quad k_1 \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=a-0} = k_2 \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=a+0} \tag{3}$$

$\delta(x - ut)$ — дельта-функция Дирака.

Применим к решению краевой задачи (1) — (3) преобразование Лапласа, полагая, что функция $T(x,\ t)$ принадлежит классу функций, для которых применимо это преобразование относительно аргумента t. Будем искать решение в классе этих функций и в классе непрерывных функций относительно x для всех значений $x \geqslant 0$.

Получим операторное уравнение

$$\frac{d^2\overline{T}(x,\ p)}{dx^2} - \gamma^2(x)\,\overline{T}(x,\ p) = -\frac{A_0}{k(x)\,u}e^{-\frac{px}{u}},\quad x \geqslant 0. \tag{4}$$

При дополнительных условиях

$$\overline{T}(0,\ p) = 0, \qquad \overline{T}(x,\ p)|_{x=a-0} = \overline{T}(x,\ p)|_{x=a+0}, \tag{5}$$

$$k_1 \left.\frac{d\overline{T}(x,\ p)}{dx}\right|_{x=a-0} = k_2 \left.\frac{d\overline{T}(x,\ p)}{dx}\right|_{x=a+0},$$

где

$$\gamma^2(x) = \begin{cases} \gamma_1^2 = \dfrac{p}{\varkappa_1} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ \gamma_2^2 = \dfrac{p}{\varkappa_2} & \text{при } \qquad x \geqslant a. \end{cases}$$

Возьмем общее решение уравнения (4) в области $0 \leqslant x \leqslant a$ в виде

$$\overline{T}_1(x,\ p) = \frac{A_0 u \varkappa_1}{k_1 p(u^2 - p\varkappa_1)}e^{-\frac{px}{u}} + C_1 e^{-\gamma_1 x} + C_2 e^{\gamma_1 x},$$

а в области $x \geqslant a$ — в виде

$$\overline{T}_2(x,\ p) = \frac{A_0 u \varkappa_2}{k_2 p(u^2 - p\varkappa_2)}e^{-\frac{px}{u}} + D_1 e^{-\gamma_2 x};$$

C_1, C_2, D_1 — произвольные комплексные постоянные. Произвольные постоянные C_1, C_2, D_1 определим, используя краевые условия и условия сопряжения. Решением обыкновенного дифференциального уравнения (4) при дополнительных условиях (5) будут следующие функции:

$$\overline{T}_1(x,\ p) = \frac{A_0 u \varkappa_1 e^{-\frac{px}{u}}}{k_1 p (u^2 - p\varkappa_1)} + \frac{A_0 u \varkappa_1 (u^2 - p\varkappa_2)}{k_1 p} \times$$

$$\times \frac{[k_2\gamma_2 \operatorname{sh}\gamma_1(x-a) - k_1\gamma_1 \operatorname{ch}\gamma_1(x-a)] + A_0\gamma_2 u e^{-\frac{pa}{u}}}{(u^2 - p\varkappa_1)} \times$$

$$\times \frac{[\varkappa_2 k_1(u^2 - p\varkappa_1) - \varkappa_1 k_2 (u^2 - p\varkappa_2)] \operatorname{sh}(\gamma_1 x) + A_0 k_1}{(u^2 - p\varkappa_2)} \times$$

$$\times \frac{p u^2 e^{-\frac{pa}{u}} (\varkappa_1 - \varkappa_2) \operatorname{sh}(\gamma_1 x)}{[k_1\gamma_1 \operatorname{ch}(\gamma_1 a) + k_2\gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 a)]},$$

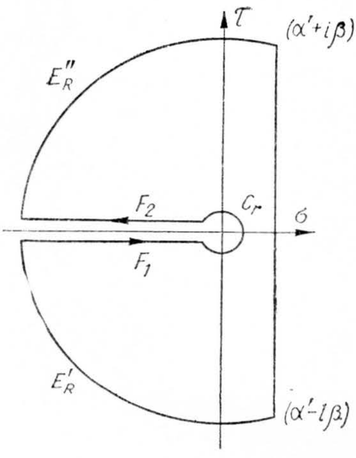
$$0 \leqslant x \leqslant a,$$

$$\overline{T}_2(x,\ p) = \frac{A_0 u \varkappa_2 e^{-\frac{px}{u}}}{k_2 p (u^2 - p\varkappa_2)} + \frac{A_0 k_2 p u^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 a)\, e^{-\frac{pa}{u}}}{k_2 p e^{-a\gamma_2}} \times$$

$$\times \frac{(\varkappa_1 - \varkappa_2) - A_0 u \varkappa_1 k_2 \gamma_1 (u^2 - p\varkappa_2) - A_0 u \gamma_1 \operatorname{ch}(\gamma_1 a)\, e^{-\frac{pa}{u}}}{(u^2 - p\varkappa_1)(u^2 - p\varkappa_2)} \times$$

$$\times \frac{[\varkappa_2 k_1 (u^2 - p\varkappa_1) - \varkappa_1 k_2 (u^2 - p\varkappa_2)]}{[k_1\gamma_1 \operatorname{ch}(\gamma_1 a) + k_2\gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 a)]}\, e^{-\gamma_2 x},\quad x \geqslant a.$$

Функция $T(x,\ t)$ в любой точке своей непрерывности может быть представлена интегралом Меллина. Подынтегральные функции $T_1(x,\ p)$ и $T_2(x,\ p)$ имеют при $p = 0$ точку ветвления; точки $p = \frac{u^2}{\varkappa_1}$, $p = \frac{u^2}{\varkappa_2}$ — устранимые особые точки с вычетами, равными нулю. Комплексный интеграл можно привести к вещественному, используя контур, показанный на рисунке. Интегрирование вдоль прямой $L(\alpha' - i\beta,\ \alpha' + i\beta)$ эквивалентно интегрированию по контуру, составленному из дуг E'_R и E''_R окружности $|p| = R$, двубережного разреза F_1, F_2 и окружности $c_r : |p| = r\ (-\pi < \arg p < \pi)$. На этом контуре и в области, ограниченной им, функции $\overline{T}_1(x,\ p)$ и $\overline{T}_2(x,\ p)$ являются однозначными функциями p. Аргументом комплексного параметра p на F_2 будет π, а на F_1 будет $-\pi$. На основании теоремы Коши [2] интеграл по этому замкнутому контуру равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов относительно полюсов подынтегральных функций, находящихся в области, ограниченной этим контуром. Положив $p = Re^{i\varphi}$, видим, что функции $\overline{T}_1(x,\ p)$ и $\overline{T}_2(x,\ p)$ на последовательности дуг C_R ограничены и равномерно стремятся к нулю при $R \to \infty$.



Согласно лемме Жордана интегралы по дугам E'_R и E''_R стремятся к нулю при $R \to \infty$.

Комплексный интеграл Меллина равен сумме интегралов по малой окружности с центром в начале координат и по прямым F_2 и F_1. Положив $p = re^{i\varphi}$ и проинтегрировав по малой окружности C_r, с последующим предельным переходом при $r \to 0$, получим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} e^{pt}\overline{T}(x,\ p)\,dp = \lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi i}\int_{\pi}^{0} e^{re^{i\varphi}t}\overline{T}(x\ re^{i\varphi})\,rie^{i\varphi}d\varphi = 0.$$

Приняв на $F_2 p = \varkappa_1 v^2 e^{i\pi}$, а на $F_1 - p = \varkappa_1 v^2 e^{-i\pi}$, найдем, что вклад при интегрировании вдоль верхнего и нижнего разрезов будет равен:

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty e^{\varkappa_1 v^2 e^{i\pi}t}\overline{T}_1(x,\ \varkappa_1 v^2 e^{i\pi})\,\varkappa_1 v e^{i\pi}dv - \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty e^{\varkappa_1 v^2 e^{-i\pi}t}\overline{T}_1(x,\ \varkappa_1 v^2 e^{-i\pi})\,\varkappa_1 v e^{-i\pi}dv,$$

$$0 \leqslant x \leqslant a,$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty e^{\varkappa_1 v^2 e^{i\pi}t}\overline{T}_2(x,\ \varkappa_1 v^2 e^{i\pi})\,\varkappa_1 v e^{i\pi}dv - \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty e^{\varkappa_1 v^2 e^{-i\pi}t}\overline{T}_2(x,\ \varkappa_1 v^2 e^{-i\pi})\,\varkappa_1 v e^{-i\pi}dv.$$

$$x \geqslant a.$$

Обозначим $\gamma_2 = \alpha\gamma_1$.

Функциями распределения температурного поля в полуограниченной составной пластине будут следующие функции:

$$T_1(x,\ t) = \frac{2A_0 u\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(vx)\,\{\varkappa_1 k_2(u^2+\varkappa_1\varkappa_2 v^2) + e^{\frac{\varkappa_1 v^2 a}{u}}\cos(va)\,[\varkappa_2 k_1}{v(u^2+\varkappa_1^2 v^2)(u^2+\varkappa_1\varkappa_2 v^2)}\times$$

$$\times\frac{(u^2+\varkappa_1^2 v) - \varkappa_1 k_2(u^2+\varkappa_1\varkappa_2 v^2)] + u\varkappa_1 k_2 v\sin(va)\,e^{\frac{\varkappa_1 v^2 a}{u}}(\varkappa_1-\varkappa_2)\}}{[k_1^2\cos^2(va) + k_2^3\alpha^2\sin^2(va)]}e^{-\varkappa_1 v^2 t}dv, \tag{6}$$

$$T_2(x,\ t) = \frac{2A_0 u}{\pi}\int_0^\infty \frac{\{uk_2\varkappa_1 v\sin(va)\,e^{\frac{\varkappa_1 v^2 a}{u}}(\varkappa_1-\varkappa_2) + \varkappa_1 k_2}{k_2 v}\times$$

$$\times\frac{(u^2+\varkappa_1\varkappa_2 v^2) + \cos(va)\,e^{\frac{\varkappa_1 v^2 a}{u}}[\varkappa_2 k_1(u^2+\varkappa_1^2 v^2) - \varkappa_1 k_2(u^2+\varkappa_1\varkappa_2 v^2)]\}}{(u^2+\varkappa_1^2 v^2)(u^2+\varkappa_1\varkappa_2 v^2)}\times$$

$$\times\frac{\{k_1\cos(va)\sin[\alpha v(x-a)] + k_2\alpha\sin(va)\cos[\alpha v(x-a)]\}}{[k_1^2\cos^2(va) + k_2^2\alpha^2\sin^2(va)]}e^{-\varkappa_1 v^2 t}dv$$

$$a \leqslant x,\ t \geqslant 0. \tag{7}$$

Поступила 1.IV 1966 г.
Институт математики АН УССР