УДК 517.911

О количестве периодических решений у одной системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

И. Г. Козубовская

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{kj}(z+t)\, u_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\varphi_{kj}(z+t)$ — непрерывные, периодические с периодом, равным 1, дифференцируемые нужное число раз функции, из которых можно составить матрицу $\varphi(t) = \| \varphi_{kj}(t) \|$, z — постоянный параметр.

Известно, что решение этой системы можно представить в виде

$$u_k = u_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}(z, t)\, x_j, \tag{2}$$

где

$$x_k = u_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, 0), \tag{3}$$

$\alpha_{kj}(z, t)$ — элементы матрицы линейно независимых решений системы (1), периодические по z с периодом, равным 1.

Полагая в решении (2) $t = 1$, получим матрицу $A(z)$:

$$A(z) = \| A_{jk}(z) \| = \| \alpha_{jk}(z, 1) \|. \tag{4}$$

Очевидно, матрица $A(z)$ является периодической с периодом 1. Определитель ее отличен от нуля при всех z. С помощью этой матрицы можно составить характеристическое уравнение по отношению к неизвестной величине ϱ:

$$| A(z) - E\varrho | = 0, \tag{5}$$

где E — единичная матрица. Обозначим корни этого уравнения ϱ_j. Предположим, что корни $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ разные. Тогда существует неособенная при всех z матрица $t(z)$, приводящая матрицу $A(z)$ к диагональному виду:

$$t(z)\, A(z)\, t^{-1}(z) = [\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n]. \tag{6}$$

Элементы матрицы $t(z)$ обозначим $t_{jk}(z)$.

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть корни $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ характеристического уравнения* (5) *разные и ни один из них не равен* 1. *Пусть также ни один из диагональных элементов матрицы $t(z)$ не равен нулю тождественно. Тогда периодические функции $w_{jk}(z)$, определяемые формулами*

$$w_{jk}(z) = \frac{t_{jk}(z)}{t_{jj}(z)}, \tag{7}$$

при $j=k$ равные единице, для каждого $j \neq k$ удовлетворяют системе

$$\frac{dw_{jk}}{dz}=w_{jk}\sum_{m=1}^{n} w_{jm}\varphi_{mj}(z)-\sum_{m=1}^{n} w_{jm}\varphi_{mk}(z), \tag{8}$$

$$k=1,2,\ldots,j-1,\ j+1,\ldots,n;\ j,k=1,\ 2,\ldots,n,$$

из $n(n-1)$ дифференциальных уравнений. Из этих функций может быть построена матрица $\|w_{jk}(z)\|=w(z)$, определитель которой отличен от нуля при всех z.

По поводу требования отсутствия тождественных нулей на главных диагоналях матрицы $t(z)$ заметим следующее. Очевидно, во многих случаях при появлении таких нулей можно от них избавиться путем перестановки столбцов в матрице $t(z)$, что будет соответствовать всего лишь иному расположению диагональных элементов.

Приведенная теорема утверждает существование решений с периодом, равным 1, у системы нелинейных дифференциальных уравнений (8). Количество решений (7) равно числу различных способов, с помощью которых матрица $A(z)$ приводится к диагональному виду (это число равно $n!$). Возникает вопрос, обладает ли система (8) периодическими решениями с периодом 1, отличными от (7)? Решению этого вопроса и посвящается настоящая заметка. Идея решения поставленного вопроса состоит в следующем. С помощью некоторого частного решения системы (8) найдем общее решение ее, из которого будет видно, при каких значениях произвольных постоянных решение становится периодическим. Таким способом сможем найти все периодические решения системы (8) и ответить на поставленный вопрос.

Из решений вида (7) системы (8), которые обозначим w^0_{jk}, составим матрицу $w^0(z)$ и с помощью нее введем в системе (1) замену переменных

$$\mathbf{u}=w^{0^{-1}}(z+t)\,\overline{\mathbf{u}}. \tag{9}$$

Рассмотрим соотношение (см. [1])

$$\mathbf{u}=w^{0^{-1}}(z+t)[\,e^{\int_z^{z+t}\Phi_1(\xi)d\xi};\ldots;e^{\int_z^{z+t}\Phi_n(\xi)d\xi}\,]\,w^0(z)\,\mathbf{x}, \tag{10}$$

где

$$\Phi_i(z)=\sum_{m=1}^{n} w^0_{im}(z)\,\varphi_{mi}(z). \tag{11}$$

Обозначая

$$\overline{x}_j\equiv\overline{u}_j\,|_{t=0} \tag{12}$$

и замечая, на основании (9), что

$$\overline{\mathbf{u}}=w^0(z+t)\,\mathbf{u},\qquad \overline{\mathbf{x}}=w^0(z)\,\mathbf{x}, \tag{13}$$

умножив соотношение (10) слева на $w^0(z+t)$, найдем:

$$\overline{\mathbf{u}}=[\,e^{\int_z^{z+t}\Phi_1(\xi)d\xi};\ldots;e^{\int_z^{z+t}\Phi_n(\xi)d\xi}\,]\,\overline{\mathbf{x}}. \tag{14}$$

Отсюда следует, что функции $\overline{u}_i$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d\overline{u}_1}{dt}=\Phi_1(z+t)\,\overline{u}_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d\overline{u}_n}{dt}=\Phi_n(z+t)\,\overline{u}_n.\end{gathered} \tag{15}$$

Если для системы (15) написать соответствующую ей систему (8), у которой искомые функции обозначим $\overline{w}_{jk}$, то получим:

$$\frac{d\overline{w}_{jk}}{dz} = [\Phi_j(z) - \Phi_k(z)]\,\overline{w}_{jk}, \tag{16}$$

$$\overline{w}_{jj} = 1, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Найдя общее решение системы (16), сможем найти общее решение системы (8), так как между функциями $\overline{w}_{jk}$ и w_{jk} существуют следующие связывающие их соотношения (см. [1]):

$$\overline{w}_{jk}(z) = \frac{\sum\limits_{s=1}^{n} w_{js}(z)\,B_{sk}(z)}{\sum\limits_{s=1}^{n} w_{js}(z)\,B_{sj}(z)}, \tag{17}$$

где $B_{sj}(z)$ — элементы матрицы $w^{0^{-1}}(z)$.

Так как функции $B_{sj}(z)$ периодические с периодом 1, то, разрешив систему (17) относительно $w_{js}(z)$, увидим, что если $\overline{w}_{jk}(z)$ периодические (или непериодические) функции с периодом 1, то и $w_{js}(z)$ будут тоже периодическими (или непериодическими). Отсюда следует, что для отыскания всех периодических решений системы (8) достаточно ограничиться подстановкой в (17) только периодических с периодом 1 решений системы (16).

Общее решение системы (16) можно представить в виде

$$\overline{w}_{jk}(z) = \overline{w}_{jk}(0)\, e^{\int\limits_0^t [\Phi_j(z) - \Phi_k(z)]\,dz}, \tag{18}$$

где $\overline{w}_{jk}(0)$ — произвольные постоянные интегрирования.

Предположим, что среднее значение периодической с периодом, равным 1, функции $\Phi_j(z) - \Phi_k(z)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^1 [\Phi_j(z) - \Phi_k(z)]\,dz \neq 2\pi mi \tag{19}$$

ни для одной пары значений j и k,

где i — мнимая единица, m — одно из целых положительных или отрицательных чисел. Тогда функции (18) будут периодическими с периодом 1 только при $\overline{w}_{jk}(0) = 0$, т. е. для всех j и k будем иметь:

$$\overline{w}_{jk}(z) = 0. \tag{20}$$

Подставляя (20) в соотношение (17) для функций $w_{js}(z)$, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{s=1}^{n} w_{js}(z)\,B_{sk}(z) = 0 \tag{21}$$

или в матричной форме, учтя, что $B(z) = w^{0^{-1}}(z)$:

$$w(z)\,w^{0^{-1}}(z) = [a_1, a_2, \ldots, a_n], \tag{22}$$

где квадратными скобками обозначена некоторая диагональная матрица. Поскольку диагональные элементы матрицы $w(z)$ должны равняться единице, получим, что

$$w(z) = w^0(z). \tag{23}$$

В результате получается следующая

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и условие* (19). *Тогда система нелинейных дифференциальных уравнений* (8) *не имеет периодических решений с периодом* 1, *отличных от* (7).

Далее имеет место такая теорема:

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то для того чтобы система* (8) *имела периодические решения с периодом* 1, *отличные от* (7), *необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной пары значений j и k и при некотором значении m в условии* (19) *имел место знак равенства*:

$$\int_0^1 [\Phi_j(z) - \Phi_k(z)]\, dz = 2\pi mi. \tag{24}$$

Необходимость. Предположим, что у системы (8) существует периодическое решение с периодом 1, отличное от (7). Тогда по крайней мере для одной пары значений j и k и некоторого m должно иметь место равенство (24), так как в противном случае в силу теоремы 2 система (8) не будет иметь периодических решений, отличных от (7).

Достаточность. Предположим, что для некоторых j, k, m имеет место равенство (24). Тогда

$$\int_0^t [\Phi_j(z) - \Phi_k(z)]\, dz \tag{25}$$

будет периодической функцией с периодом 1 и $\overline{w}_{jk}(z)$ (см. (18)) будет периодической функцией при любом значении произвольной постоянной $\overline{w}_{jk}(0)$. Подставляя выражение (18), где $\overline{w}_{jk}(0) \neq 0$, в (17), для элементов матрицы $w(z)$ получим систему линейных алгебраических уравнений с периодическими по z коэффициентами с периодом, равным 1. Поэтому решением системы будут периодические с периодом 1 функции $w_{jk}(z)$. Это решение перейдет в (7), если положить в нем $w_{jk}(0) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Шаршанов, К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сб. «Матем. физика», изд-во «Наукова думка», К., 1966.

Поступила 16.IX 1967 г.

Институт математики АН УССР