УДК 519.1

Подсчет абелевых слов, составленных из букв некоторого набора алфавитов

Н. Г. Винниченко

Конечное множество X назовем алфавитом, а его элементы — буквами. Количество элементов множества X обозначим через $|X|$. Всякую конечную последовательность элементов множества X будем называть словом. Количество элементов последовательности назовем длиной этого слова [1].

Слово m — абелево, если оно рассматривается независимо от порядка расположения в нем букв, т. е. абелево слово длины r — неупорядоченная r-выборка из множества X [2].

Рассмотрим набор $\{X_i\}$ конечных алфавитов $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Обозначим через $M(X_i, k_i)$ множество нетождественных абелевых слов длиной k_i, составленных из букв алфавита X_i. Будем говорить, что слово m задано на наборе алфавитов $\mathbf{X} = \{X_i\}$ с набором чисел

$$\xi = (k_1, k_2, \ldots, k_n),$$

если оно получено выписыванием в любом порядке по одному элементу из множеств $M(X_1, k_1)$, $M(X_2, k_2), \ldots, M(X_n, k_n)$.

Множество нетождественных абелевых слов, заданных на наборе алфавитов $\mathbf{X}$ с набором чисел $\xi = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, обозначим через $M(\mathbf{X}; \xi)$ или $M(\mathbf{X}; k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Подсчитаем количество $|M(\mathbf{X}; \xi)|$ элементов множества $M(\mathbf{X}; \xi)$.

Лемма. *Пусть* $X_i \cap X_j = \varnothing$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$. *Тогда*

$$|M(\mathbf{X}; \xi)| = \prod_{m=1}^{n} f(|X_m|, k_m), \tag{1}$$

где $f(p, q)$ — *количество комбинаций с повторениями из* p *элементов по* q.

Доказательство. Так как слова из множества $M(X_i, k_i)$ не имеют одинаковых букв со словами множества $M(X_j, k_j)$ $(i \neq j;\ j = 1, 2\ \ldots, n)$, то

$$|M(\mathbf{X};\ \xi)| = |M(X_1, k_1)| \cdot |M(X_2, k_2)| \ldots |M(X_n, k_n)|.$$

Учитывая, что

$$|M(X_m, k_m)| = f(|X_m|, k_m), \tag{1'}$$

получаем формулу (1).

С целью упрощения последующих выкладок введем понятие алфавитного графа.

Набору алфавитов $\mathbf{X}$ поставим в соответствие полный граф, вершинам a_i которого приписаны числа $|X_i|$ и целые неотрицательные числа k_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, а ребрам $(a_i a_j)$ — числа $|X_{ij}| = |X_i \bigcap X_j|$ $(i,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$. Такой граф назовем алфавитным графом, соответствующим набору алфавитов $\mathbf{X}$ и набору чисел $\xi = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, и обозначим через $U(\mathbf{X}; \xi)$.

Обозначим через $A(\mathbf{X};\ \xi)$ граф, полученный из графа $U(\mathbf{X};\ \xi)$ удалением тех ребер $(a_k a_l)$, которым приписано число $|X_{kl}| = 0$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n;\ k \neq l)$; через $A_{ij}(\mathbf{X};\ \xi)$ — такой связный граф $A(\mathbf{X};\ \xi)$, ребро $(a_i a_j)$ которого разбивающее; через $A_i(\mathbf{X}';\ \xi')$, $A_j(\mathbf{X}'';\ \xi'')$ — графы, полученные из графа $A_{ij}(\mathbf{X};\ \xi)$ в результате удаления ребра $(a_i a_j)$ и заменой чисел $|X_i|$, $|X_j|$, k_i, k_j числами $|X_i \diagdown X_{ij}|$, $|X_j \diagdown X_{ij}|$, x_i, x_j соответственно. Будем считать, что индексы при алфавитах $X_1, X_2, \ldots, X_n$ расставлены так (такую перестановку можно проделать всегда), что $a_l \in A_{ij}(\mathbf{X};\ \xi)$ $(i < j)$ принадлежит графу $A_i(\mathbf{X}';\ \xi')$ при $l < i$, а $j = i + 1$.

При такой расстановке индексов граф $A_i(\mathbf{X}';\ \xi')$ соответствует набору алфавитов $\mathbf{X}' = (X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_i \diagdown X_{i,i+1})$ и набору чисел $\xi = (k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, x_i)$; граф $A_{i+1}(\mathbf{X}'';\ \xi'')$ — набору алфавитов $\mathbf{X}'' = (X_{i+1} \diagdown X_{i,i+1}, X_{i+2}, \ldots, X_n)$ и набору чисел $\xi'' = (X_{i+1}, k_{i+2}, \ldots, k_n)$.

Множества $M(\mathbf{X};\ \xi)$, $M(\mathbf{X}';\ \xi')$, $M(\mathbf{X}'';\ \xi'')$ можно считать теперь заданными на графах $A_{i,i+1}(\mathbf{X};\ \xi)$ (на $A(\mathbf{X};\ \xi)$ в более общем случае), $A_i(\mathbf{X}';\ \xi')$, $A_{i+1}(\mathbf{X}'';\ \xi'')$. Для того чтобы подчеркнуть сказанное, обозначим их через $M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X};\ \xi)$, $M_{A_i}(\mathbf{X}';\ \xi')$, $M_{A_{i+1}}(\mathbf{X}'';\ \xi'')$.

Теорема. *Пусть в графе $A_{i,i+1}(\mathbf{X};\ \xi)$ имеет место один из следующих случаев:*

1) $|X_{i,i+1}| \neq |X_i|, |X_{i+1}|$. *Тогда*

$$|M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X};\ \xi)| = \sum_{k=0}^{k_i+k_{i+1}} f(|X_{i,i+1}|, k_i) \sum_{\substack{x_i+x_{i+1}=k_i+k_{i+1}-k \\ 0 \leqslant x_i \leqslant k_i \\ 0 \leqslant x_{i+1} \leqslant k_{i+1}}} |M_{A_i}(\mathbf{X}';\ k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, x_i)|\,|M_{A_{i+1}}(\mathbf{X}'';\ x_{i+1},\ k_{i+2}, \ldots, k_n)|; \tag{2}$$

2) $|X_{i,i+1}| = |X_i| \neq |X_{i+1}|$. *Тогда*

$$|M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X};\ \xi)| = \sum_{k=k_1}^{k_1+k_2} f(|X_{1,2}|, k) \cdot |M_{A_2}(\mathbf{X}'';\ k_1 + k_2 - k, k_3, \ldots, k_n)|; \tag{3}$$

3) $|X_{i,i+1}| = |X_i| = |X_{i+1}|$. *Тогда*

$$|M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X};\ \xi)| = f(|X_{1,2}|, k_1 + k_2). \tag{4}$$

Доказательство. В случае 1) каждое слово множества $M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X};\ \xi)$ состоит из трех слов, одно из которых принадлежит множеству $M_{A_i}(\mathbf{X}';\ \xi')$, другое—множеству $M_{A_{i+1}}(\mathbf{X}'';\ \xi'')$, третье—множеству $M(X_{i,i+1}, k)$ $(k = 0, 1, \ldots, k_i + k_{i+1})$. При любой тройке чисел k, x_i, x_{i+1}, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x_i + x_{i+1} = k_i + k_{i+1} - k, \\ 0 \leqslant x_i \leqslant k_i, \\ 0 \leqslant x_{i+1} \leqslant k_{i+1}, \end{cases} \tag{*}$$

любые три слова, взятые по одному из множеств $M_{A_i}(\mathbf{X}'; \xi')$, $M_{A_{i+1}}(\mathbf{X}''; \xi'')$, $M(X_{i,i+1}, k)$, не имеют общих букв и, выписанные рядом в любом порядке, дают слово множества $M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X}; \xi)$. Следовательно, количество слов множества $M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X}; \xi)$ с заданными числами x_i, x_{i+1}, k будет

$$|M_{A_i}(\mathbf{X}'; \xi')| \cdot |M_{A_{i+1}}(\mathbf{X}''; \xi'')| \cdot |M(X_{i,i+1}, k)|.$$

Число $|M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X}; \xi)|$ определится как сумма таких произведений по всем тройкам чисел x_i, x_{i+1}, k, которые удовлетворяют условиям (*).

В случае 2) слово множества $M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X}; \xi)$ состоит из двух слов, одно из которых принадлежит множеству $M(X_{1,2}, k)$, другое—множеству $M_{A_2}(\mathbf{X}''; \xi'')$. Действительно, в этом случае граф $A_i(\mathbf{X}'; \xi')$ содержит точку a_i, которая является концевой. Если бы точка a_i не была концевой, то алфавит X_l, соответствующий вершине a_l, смежной с вершиной a_i, имел бы общие буквы с алфавитом X_i, а значит и с алфавитом $X_{i,i+1}$. Так как $X_{i,i+1} \subset X_{i+1}$, то $X_l \cap X_{i+1}$ не было бы пустым, а значит ребро $(a_i a_{i+1})$ графа не было бы разбивающим. По принятой нумерации $i = 1$, $i + 1 = 2$. Слова из множества $M(X_{1,2}, k)$ не имеют общих букв со словами из множества $M_{A_2}(\mathbf{X}; \xi)$. Значит при данном k количество слов из множества $M_{A_{i,i+1}}(X; \xi)$ будет

$$|M(X_{1,2}, k)| \cdot |M_{A_2}(X''; k_1 + k_2 - k, k_3, \ldots, k_n)|.$$

Любое слово из множества $M_{A_2}(\mathbf{X}; \xi)$ должно содержать k_1 букв из алфавита $X_1 \equiv X_{1,2}$, следовательно k может принимать целочисленные значения $\geqslant k_1$ и $\leqslant k_1 + k_2$. Просуммировав по k, получаем формулу (3).

Как и в случае 2), можно показать, что в случае 3) точки a_i, a_{i+1} графа $A_{i,i+1}(\mathbf{X}; \xi)$ являются концевыми. Следовательно, граф является двувершинным, а набор алфавитов $\mathbf{X}$ состоит из двух алфавитов X_1, X_2, причем $X_1 \equiv X_{1,2}$, $X_2 \equiv X_{1,2}$. Поэтому условие наличия в словах множества $M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X}; \xi)$ k_1 букв из алфавита X_1 и k_2 букв из алфавита X_2 сводится к тому, чтобы каждое слово из множества $M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X}; \xi)$ состояло из $k_1 + k_2$ букв любого из алфавитов X_1, X_2, $X_{1,2}$. Следовательно, количество элементов множества $M_{A_{i,i+1}}(\mathbf{X}; \xi)$ подсчитается по формуле (4).

Формулы, полученные в теореме, позволяют находить число $|M_A(\mathbf{X}; \xi)|$ для графов $A(\mathbf{X}; \xi)$, у которых каждое ребро является разбивающим, т. е. для деревьев.

Число $|M_A(\mathbf{X}; \xi)|$ можно найти также для тех графов $A(\mathbf{X}; \xi)$, которые не содержат циклов. Обозначим через $A'(\mathbf{X}'; \xi')$ подграф графа $A(\mathbf{X}; \xi)$, состоящий из всех его изолированных вершин; через $A_1(\mathbf{X}_1; \xi_1)$, $A_2(\mathbf{X}_2; \xi_2), \ldots,$ $A_q(\mathbf{X}_q; \xi_q)$ — связанные компоненты графа $A(\mathbf{X}; \xi)$.

Тогда можно записать

$$|M_A(\mathbf{X}; \xi)| = |M_{A'}(\mathbf{X}'; \xi')| \prod_{i=1}^{q} |M_{A_i}(\mathbf{X}_i; \xi_i)|, \tag{5}$$

где $|M_{A'}(\mathbf{X}'; \xi')|$ подсчитывается по формуле (1), $|M_{A_i}(\mathbf{X}_i; \xi_i)|$ — по формулам (2) — (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.
2. Г. Дж. Райзер, Комбинаторная математика, «Мир», М., 1966.

Поступила 29.XII 1966 г.
Институт математики АН УССР