УДК 519.49

# Наследственные порядки

*Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко*

Мы будем в основном придерживаться терминологии и обозначений работы [1]. Пусть $\mathfrak{o}$ — дедекиндово кольцо, $\Lambda$ — некоторое $\mathfrak{o}$-кольцо. Напомним, что $\Lambda$ называется наследственным, если всякий $\Lambda$-идеал проективен. Для этого необходимо и достаточно, чтобы был проективен каждый неприводимый $\Lambda$-модуль представления. В этом случае алгебра $\widetilde{\Lambda} = \Lambda \otimes_{\mathfrak{o}} k$ ($k$ — поле частных $\mathfrak{o}$) полупроста. Разлагая $\widetilde{\Lambda}$ в прямую сумму простых $k$-алгебр, получим параллельно и разложение $\Lambda$. Поэтому можно ограничиться изучением наследственных порядков в простых $k$-алгебрах. В настоящей работе дается полное описание наследственных порядков в двух частных случаях:

А) $\mathfrak{o}$ — полное локальное дедекиндово кольцо;

Б) $\mathfrak{o}$ — кольцо главных идеалов, $\widetilde{\Lambda} = M_n(k)$ (алгебра матриц размерности $n \times n$ над $k$).

1°. Пусть $\mathfrak{o}$ — полное локальное дедекиндово кольцо. Тогда имеет место следующий критерий наследственности.

Теорема 1.1. *Вполне разложимое* (т. е. *распадающееся в прямую сумму неприводимых модулей представлений*) *$\mathfrak{o}$-кольцо $\Lambda$ наследственно тогда и только тогда, когда каждый неприводимый $\Lambda$-модуль представления имеет ровно один максимальный подмодуль* (*т. е. структура неприводимых модулей, принадлежащих каждой простой компоненте, линейно упорядочена*).

Доказательство. Необходимость. Пусть $A$ — неприводимый $\Lambda$-модуль представления. Он проективен и потому, в силу теоремы Крулля—Шмидта [2], — прямое слагаемое кольца: $\Lambda = A \oplus X$, $A = e\Lambda$, где $e$ — минимальный идемпотент. Если $R$ — радикал $\Lambda$, $\overline{\Lambda} = \Lambda/R$, то $\overline{\Lambda} = \overline{A} \oplus \overline{X}$, причем $\overline{A} = \overline{e}\overline{\Lambda}$ неразложимый $\overline{\Lambda}$-модуль, т. е. простой модуль [3]. Пусть $B$ — собственный подмодуль $A$, тогда $B \oplus X$ — собственный подмодуль $\Lambda$. $\overline{B} = B + R/R = B/B \cap R$ — подмодуль $\overline{A}$, значит либо $\overline{B} = 0$, либо $\overline{B} = \overline{A}$. В последнем случае $B + R \supset A$ и $B + R + X = \Lambda$, отсюда, по лемме Накаяма, $B \oplus X = \Lambda$, что невозможно. Таким образом, $\overline{B} = 0$ и $B \subset R$, т. е. $B \subset R \cap A$ и $R \cap A$ — единственный максимальный подмодуль $A$.

Достаточность. Покажем, что если $\Lambda$ вполне разложимо и $A$ содержит ровно один максимальный подмодуль $A'$, то $A$ проективен. Пусть $\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \oplus B_i$, где $B_i$ — неприводимы. $A$ — циклический модуль, поэтому существует точная последовательность

$$\Lambda \xrightarrow{\varphi} A \to 0.$$

Рассмотрим $\varphi_i : B_i \to A$ (ограничение $\varphi$ на $B_i$). Если для всех $i$ $\operatorname{Im} \varphi_i \subset A'$, то $\operatorname{Im} \varphi \subset A'$, что невозможно. Значит найдется $j$ такое, что $\operatorname{Im} \varphi_j = A$

Так как $\operatorname{Ker} \varphi_j = 0$ (следует из неприводимости $B_j$), то отсюда $\varphi_j : B_j \approx A$ и $A$ проективен.

2°. Описание наследственных $\mathfrak{o}$-колец ($\mathfrak{o}$ — полное локальное дедекиндово кольцо) сводится к описанию наследственных порядков в $M_n(D)$ ($D$ — конечномерное тело над полем частных $k$ кольца $\mathfrak{o}$).

В $D$ имеется один максимальный порядок $\mathfrak{D}$, являющийся единственным наследственным порядком в $D$. Если $\Lambda$ — наследственный порядок в

$M_n(D)$, то он содержит все скалярные матрицы $\omega E$ $(\omega \in \mathfrak{O})$ и всякий $\Lambda$-модуль представления можно рассматривать как левый $\mathfrak{O}$-модуль.

Кольцо $\mathfrak{O}$ как неразложимое $SBI$-кольцо [3] имеет один максимальный идеал $R$, изоморфный $\mathfrak{O}$, т. е. главный: $R = \pi\mathfrak{O} = \mathfrak{O}\pi$ (так как $\pi^{-1}\mathfrak{O}\pi = \mathfrak{O}$). Если $A$ — неприводимый $\Lambda$-модуль представления, то всякий неприводимый модуль — подмодуль $A$, структура подмодулей $A$ линейна (теорема 1.1) и максимальный подмодуль $A$ содержит $\pi A$.

Кольцо $\Lambda$ можно считать подкольцом $M_n(\mathfrak{O})$, содержащим каноническую систему идемпотентов $e_{11}, \ldots, e_{nn}$ ($e_{ij}$ — система матричных единиц $M_n(D)$). В качестве $A$ выберем модуль с базисом $e_1, \ldots, e_n$ $(e_i e_{kj} = \delta_{ik} e_j)$. Всякий неприводимый $\Lambda$-модуль — прямое слагаемое $\Lambda$ и потому изоморфен модулю с базисом $d_1 e_1, \ldots, d_n e_n$, где не все $d_i$ делятся на $\pi$. Так как этот модуль должен лежать между $A$ и $\pi A$, то некоторые $d_i$ равны 1, остальные — $\pi$.

Пусть $A = A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \pi A$ — композиционный ряд между $A$ и $\pi A$, $A_j = [d_1^j e_1, \ldots, d_n^j e_n]$, причем если $j < j'$, то $d_i^j$ делит $d_i^{j'}$. Меняя нумерацию элементов $e_1, \ldots, e_n$ (чему соответствуют унимодулярные преобразования кольца $\Lambda$), можно добиться того, чтобы при $i < i'$, $d_i^j$ делил $d_{i'}^j$, для всех $j$. Тогда каждый $A_j$ равен одному из модулей $B_s = [\pi e_1, \ldots, \pi e_s, e_{s+1}, \ldots, e_n]$ $(0 \leqslant s \leqslant n-1)$.

Таким образом, $\Lambda$ содержит $\Lambda_0 = \bigcap_{s=0}^{n-1} \Lambda_s$, где $\Lambda_s$ — кольцо множителей $B_s$, и получаем следующий результат (учитывая, что $\Lambda_0$ наследственно).

Теорема 2.1. *Всякий наследственный порядок в $M_n(D)$ изоморфен кольцу $\Lambda$ такому, что $\Lambda_0 \subset \Lambda \subset M_n(\mathfrak{O})$, где $\Lambda_0$ — кольцо с базисом $c_{ij} e_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, причем $c_{ij} = 1$ при $i \leqslant j$, $c_{ij} = \pi$ при $i > j$.*

3°. Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{o}$ — дедекиндово кольцо, $k$ — его поле частных, $\Lambda$ — порядок в $M_n(k)$ такой, что в главном роде [1] кольца $\Lambda$ содержится только один модуль. Тогда, если для каждого простого идеала $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{o}$ $\overline{\Lambda}_{\mathfrak{k}} \approx \overline{\Lambda}_{1\mathfrak{k}}$, $\Lambda_1$ — порядок в $M_n(k)$, то $\Lambda \approx \Lambda_1$.*

Доказательство. Для каждого $\mathfrak{k}$ существует матрица $S_{\mathfrak{k}} \in M_n(\overline{k}_{\mathfrak{k}})$ такая, что $S_{\mathfrak{k}} \Lambda_{\mathfrak{k}} S_{\mathfrak{k}}^{-1} = \overline{\Lambda}_{1\mathfrak{k}}$, т. е. $\overline{A}_{\mathfrak{k}} = S_{\mathfrak{k}} \overline{\Lambda}_{\mathfrak{k}} = \overline{\Lambda}_{1\mathfrak{k}} S_{\mathfrak{k}}$, причем так как почти для всех $\mathfrak{k}$ $\overline{\Lambda}_{\mathfrak{k}} = \overline{\Lambda}_{1\mathfrak{k}}$, то почти для всех $\mathfrak{k}$ $S_{\mathfrak{k}} = E$ и $\overline{A}_{\mathfrak{k}} = \overline{\Lambda}_{\mathfrak{k}}$. Поэтому [1] в $M_n(k)$ найдется решетка $A$, локализации которой — $\overline{A}_{\mathfrak{k}}$ для каждого $\mathfrak{k}$. Тогда $A$ принадлежит главному роду кольца $\Lambda$ и потому $A \approx \Lambda$, т. е. $A = S\Lambda$, где $S$ — обратимая матрица из $M_n(k)$. Левое кольцо множителей $A$ — $S\Lambda S^{-1}$. Но, с другой стороны, так как по каждому $\mathfrak{k}$ левое кольцо множителей $\overline{A}_{\mathfrak{k}}$ — $\overline{\Lambda}_{1\mathfrak{k}}$, то [1] левое кольцо множителей $A$ — $\Lambda_1$. Следовательно, $\Lambda_1 = S\Lambda S^{-1} \approx \Lambda$.

Следствие 1. *Если $\mathfrak{o}$ — кольцо главных идеалов, $\Lambda$ — наследственный порядок в $M_n(k)$ и для каждого $\mathfrak{k}$ $\overline{\Lambda}_{1\mathfrak{k}} \approx \overline{\Lambda}_{\mathfrak{k}}$ ($\Lambda_1$ — порядок в $M_n(k)$), то $\Lambda_1 \approx \Lambda$.*

Доказательство следует из того, что в этом случае в главном роде кольца $\Lambda$ лежит ровно один модуль.

Следствие 2. *Если $\mathfrak{O}$ — кольцо главных идеалов, то всякий наследственный порядок в $M_n(k)$ изоморфен порядку с базисом $c_{ij} e_{ij}$, где $c_{ij} = 1$ при $i \leqslant j$, при $i > j$ $c_{ij} \in \mathfrak{o}$ и свободно от квадратов и $c_{ij} c_{jk}$ делится на $c_{ik}$ для любых $i, j, k$.*

Следствия 1 и 2 являются некоторым уточнением результатов Энсони [5].

Авторы выражают глубокую благодарность Д. К. Фаддееву и А. В. Ройтеру, а также всем членам семинара по теории представлений Института математики АН УССР.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Д. К. Фаддеев, Введение в мультипликативную теорию модулей целочисленных представлений, Труды Матем. ин-та АН СССР, т. 80, 1965.
2. З. И. Боревич, Д. К. Фаддеев, Теория гомологий в группах. II, Вестник ЛГУ, № 7, 1959.
3. Н. Джекобсон, Строение колец, ИЛ, М., 1961.
4. H. Hasse, Ueber $p$-adische Schiefkörpen und ihre Bedeutung für die Arithmetik hypercomplexer Zahlsysteme, Math. Ann., **104**, 1931, 495—534.
5. M. J. Anthony, Hereditary orders over principal ideal domains. «Dissert. Abstrs.», **25**, N 4, 1964, 2539.



Поступила 8.IX 1966 г.


Институт математики АН УССР