УДК 517.942.4+517.911

К вопросу о периодических решениях квазилинейных автономных систем с запаздыванием

И. Г. Козубовская, Д. И. Мартынюк

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + \varepsilon f[y(t),\ y(t-\Delta),\ \varepsilon], \tag{1}$$

где ε — малый параметр, A — $n \times n$-матрица, элементами которой служат комплексные числа, которые могут зависеть от ε, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — непрерывная функция своих переменных, Δ — постоянная величина, характеризующая запаздывание в системе. Предполагается, что существуют положительные постоянные R, K, ε_0 такие, что

$$\| f(y, z, \varepsilon) \| \leqslant K, \ \| f(y, z, \varepsilon) - f(y_1, z_1, \varepsilon) \| \leqslant K \{ \| y - y_1 \| + \| z - z_1 \| \} \quad (2)$$

для всех $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$ и любых $\| y \|$, $\| y_1 \|$, $\| z \|$, $\| z_1 \| \leqslant R$.

В данной заметке мы покажем, как задачу нахождения периодических решений систем вида (1) можно свести к исследованию периодических решений неавтономных систем стандартного вида с запаздывающим аргументом.

Для упрощения изложения предположим, что матрица A имеет вид

$$A = \operatorname{diag}(\varrho_1(\varepsilon), \ldots, \varrho_n(\varepsilon)),$$

где $\varrho_1(\varepsilon), \ldots, \varrho_n(\varepsilon)$ — комплексные постоянные, $\varrho_j(\varepsilon) = \varrho_j(0) + \varepsilon\varkappa_j(\varepsilon)$, $\varrho_j(0) = ik_j\sigma/m_j$, где $\sigma > 0$, k_j, m_j — целые, отличные от нуля и взаимно простые числа.

У автономных систем, в отличие от неавтономных систем, периодическое решение, если оно существует, обладает периодом, который, вообще говоря, изменяется вместе со всеми параметрами системы. Поэтому, чтобы найти периодическое решение системы (1), необходимо определить его период $2\pi/\omega$ как функцию ε. Вполне естественно, искать такие решения, для которых $\omega(\varepsilon)$ удовлетворяет условию $\omega(0) = \sigma$.

Положим $\omega = \sigma + \varepsilon\beta(\varepsilon)$, где величина $\beta(\varepsilon)$ — подлежащая определению функция ε, и сделаем замену переменных

$$y = e^{Bt}x, \tag{3}$$

где

$$B = \operatorname{diag}(i\tau_1, \ldots, i\tau_n), \ \tau_j = ik_j\omega/m_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В результате замены переменных (3) система (1) преобразуется в систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = \varepsilon Q(t, x(t), x(t-\Delta), \varepsilon), \tag{4}$$

где

$$Q(t, x(t), x(t-\Delta), \varepsilon) = e^{-Bt} f(e^{Bt}, x(t), x(t-\Delta), \varepsilon) + \\ + \varepsilon A^*(\beta) x(t), \quad \varepsilon A^*(\beta) = A - B.$$

Таким образом, мы получили неавтономную систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодической по t периода $T = 2\pi m_1 \ldots m_n/\sigma + \varepsilon\beta(\varepsilon)$ правой частью.

При достаточно малых $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$ система (4) будет T-системой, поэтому для отыскания ее периодических решений можно пользоваться результатами работы [1].

Всякое периодическое решение $x(t)$ периода T можно рассматривать как предел равномерно сходящейся последовательности периодических функций $x_m(t)$, определяемых соотношениями

$$x_{m+1}(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t (I - P) [e^{-Bt} f(e^{Bt}, x_m(t), x_m(t-\Delta), \varepsilon) + \\ + A^*(\beta) x_m(t)]\, dt, \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{5}$$

где x_0 — точка, через которую проходит периодическое решение в начальный момент времени $t = 0$, I — тождественный оператор, P — оператор усреднения.

Согласно [1], x_0, β должны удовлетворять уравнению

$$\Delta(x_0, \beta, \varepsilon) = \frac{1}{T} \int_0^T [e^{-Bt} f(e^{Bt}, x(t, x_0, \beta, \varepsilon),$$

$$x(t-\Delta,\ x_0,\ \beta,\ \varepsilon),\ \varepsilon) + A^*(\beta)\, x(t,\ x_0,\ \beta,\ \varepsilon)]\, dt = 0, \tag{6}$$

где $x(t,\ x_0,\ \beta,\ \varepsilon)$ — предельная функция последовательности (5).

Следовательно, если при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_2$ $(\varepsilon_2 < \varepsilon_1)$ существует n-мерный вектор $x_0(\varepsilon)$ и действительные $\beta(\varepsilon)$ такие, что

$$\Delta(x_0(\varepsilon),\ \beta(\varepsilon),\ \varepsilon) = 0, \tag{7}$$

то существует периодическое периода $T = 2\pi m_1 \ldots m_n/\sigma + \varepsilon\beta(\varepsilon)$ решение системы (1) вида

$$y = e^{Bt} x(t).$$

Замечание. Система (7) состоит из n уравнений с $n + 1$ неизвестными x_0 и β. Поэтому для определения этих неизвестных будем считать, что какие-то $n - 1$ компонент вектора x_0 и β являются функциями оставшейся компоненты x_0 и ε. В силу автономности системы (1) эту компоненту можно задать произвольно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. И. Мартынюк, А. М. Самойленко, О периодических решениях нелинейных систем с запаздыванием, Сб. «Математическая физика», «Наукова думка», К., 1967.

Поступила 6. IX 1967 г.

Институт математики АН УССР