УДК 513.821.833

Об одной проблеме Бинга

В. П. Компаниец

В [1] Р. Бинг поставил следующую проблему: существует ли непрерывное точечное (определения встречающихся понятий см. в [1, 2]) разбиение D эвклидова пространства E^n, фактор-пространство E^n_D которого было бы многообразием, не гомеоморфным E^n? Частичный ответ для $n = 3$ дан в [4, 5]. В настоящей заметке эта проблема решается отрицательно (теорема 1). Кроме этого, доказывается, что для замкнутых многообразий точечное отображение является гомотопической эквивалентностью (теорема 2). Доказательство этих фактов основывается на гомотопическом критерии точечного отображения, в доказательстве [2] которого имеется ошибка. Поэтому предварительно приведу ее исправление.

Начиная с 17 строки снизу на стр. 5 и до 6 строки сверху на стр. 6 должно быть:

Для этого докажем (индукцией по k), что для k-мерного остова K^k произвольной триангуляции K и любого $\varepsilon^* > 0$ существует отображение $\Phi_k : L \smile K^k \to \bigcup\limits_{\varkappa} \widetilde{Q}_\varkappa$ такое, что

$$d(f\Phi_k, g/L \smile K^k) < \varepsilon^*, \quad \Phi_k/L = \varphi.$$

База индукции тривиально справедлива: в качестве $\Phi(v_\iota)$ ($\iota = 1, 2, \ldots, \iota_0$), где v_ι — вершины комплекса K, выберем произвольно по точке в каждом из множеств $f^{-1}(g(v_\iota))$. Далее, допустим, что предложение доказано для $k-1$. Покажем сначала, что если подразбиение K достаточно мало, то можно предполагать, что для любого симплекса s^k этого подразбиения

$$\Phi_{k-1}(\partial s^k) \subset \widetilde{Q}. \qquad (*)$$

Покроем $g(K)$ конечным числом открытых шаров Q'_q $(q = 1, \ldots, q)$ таких, что $f^{-1}(Q'_q) \subset \widetilde{Q}_{i(q)}$, где $\widetilde{Q}_{i(q)} \in \{\widetilde{Q}_\varkappa\}_\varkappa$. Обозначим через δ' лебегово число покрытия $\{Q'_q\}_q$ и выберем настолько мелкое подразбиение K_* комплекса K, чтобы $\max\limits_{s^k \in K^k_*} \operatorname{diam} g(s^k) < \delta'/3$. В силу предположения индукции существует отображение $\Phi_{k-1} : K^{k-1}_* \to \bigcup\limits_\varkappa \widetilde{Q}_\varkappa$ такое, что $d(f\Phi_{k-1}, g/K^{k-1}_*) < \delta'/3$. Тогда $\operatorname{diam} f\Phi_{k-1}(\partial s^k) < \delta'$ и, следовательно, $\Phi_{k-1}(\partial s^k) \subset \widetilde{Q}$.

Теорема 1. *Пусть M — многообразие без края, $f : E^n \to M$ ($n \neq 4$, в случае $n = 3$ требуем, чтобы M было неприводимым многообразием) — точечное отображение.*

Тогда M гомеоморфно E^n.

Доказательство. В предположении, что f — компактное отображение (что будет доказано позже), докажем гомеоморфность M и E^n. Применяя теорему 1 из [2], имеем, что M — стягиваемое открытое многообразие. Остается показать, что M односвязно в бесконечности (т. е. для всякого компакта $C \subset M$ существует компакт$D \supset M$ такой, что $C \subset D$ и $\pi_1(M \setminus D) = 0$).

Возьмем регулярную окрестность P полиэдральной окрестности компакта C. Тогда ∂P — многообразие. Если $\pi_1(\partial P) = 0$, то по теореме ван Кампена дополнительные области также односвязны, и, следовательно, в качестве D можно взять такую регулярную окрестность. Если же $\pi_1(\partial P) \neq 0$, то образующие группы $\pi_1(\partial P)$ можно заклеить [3, лемма 3.1], причем так, что заклеивающие пленки не будут задевать C (на эту возможность автору указал А. В. Чернавский).

Условие, при котором это возможно сделать в нашей ситуации, выполняется. Это условие заключается в том, что для всякого компакта C должен существовать компакт D' такой, что

$$i_\#(\pi_1(M \setminus D')) = 0,$$

где $i : M \setminus D' \to M \setminus C$ — отображение вложения.

Проверим его выполнимость. Существует клетка $Q^n \subset E^n$ такая, что

$$Q^n \supset f^{-1}(C),$$

$$\pi_1(E^n \setminus Q^n) = 0.$$

Можно также предположить, что Q такова, что

$$f^{-1}(C) \cap \partial Q = 0. \tag{$*'$}$$

Покажем, что можно положить $D' = f(Q^n)$.

Пусть $\alpha : S^1 \to M \setminus D'$ — произвольная петля в $M \setminus D'$. Так как отображение $f : E^n \to M$ точечно и компактно, то методом, аналогичным изложенному при доказательстве теоремы 1 из [2], можно показать, что существует отображение $g : S^1 \to E^n \setminus Q^n$ такое, что fg гомотопно α в $M \setminus C$.

Существует гомотопия

$$\overline{H}(x, t) : S^1 \times I \to *, \; * \in E^n \setminus Q^n$$

такая, что

$$\overline{H}(x, 0) = g, \quad \overline{H}(S^1, 1) = *, \quad H(S^1 \times 1) \cap Q^n = 0.$$

Положим

$$H(x, t) = f\overline{H}(x, t) : S^1 \times I \to M \setminus C.$$

Тогда, так как

$$H(x, 0) = fg,$$

$$H(S^1, 1) = y, \quad y \in M \setminus C,$$

а fg гомотопно α, то α гомотопно 0.

При этом в силу условия $(*')$

$$H(S^1 \times I) \cap C = 0.$$

Компактность отображения f следует из следующей леммы, в доказательстве которой используется идея Коннэла [4].

Лемма. *Пусть M, M_1 — открытые (т. е. некомпактные без краев) многообразия, $f: M \to M_1$ — точечное отображение.*

Тогда отображение f компактно.

Доказательство. Для этого достаточно доказать, что для всякой точки $y \in M_1$ существует окрестность $V(y)$ такая, что $\overline{f^{-1}(V(y))}$ компактно.

От противного: пусть существует точка $y \in M$ такая, что для всякой окрестности $V(y)$ множество $f^{-1}(V(y))$ «неограничено», т. е. $\overline{f^{-1}(V(y))}$ некомпактно.

Обозначим через U некоторую эвклидову окрестность точки $y \in M_1$, и через W — некоторую клеточную окрестность $f^{-1}(y)$ такую, что

$$W \subset f^{-1}(U).$$

Существует $(n-1)$-мерная сфера S^{n-1} в W такая, что

1) $f^{-1} f(S^{n-1}) \subset W$,

2) $\operatorname{Int} S^{n-1} \supset f^{-1}(y)$,

где $\operatorname{Int} S^{n-1}$ — «внутренняя» компонента дополнения $W \setminus S^{n-1}$.

Действительно, должна существовать $(n-1)$-сфера, для которой выполняется 1-е условие (2-е осуществимо всегда в силу точечности отображения f), так как в противном случае для каждой $S_i^{n-1} \subset W$, $i = 1, 2, \ldots$, такой, что

$$d(S_i^{n-1}, f^{-1}(y)) < \frac{1}{i}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

множество $\{f^{-1} f(S_i^{n-1}) \cap M \setminus W\}$ непусто и, следовательно, существует последовательность точек $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in \{f^{-1} f(S_i^{n-1}) \cap M \setminus W\}$, которая может быть выбрана (в силу связности прообразов точек) так, что

$$x_i \underset{i \to \infty}{\to} x_0 \neq \infty,$$

что противоречит непрерывности f.

Ясно, что $f^{-1} f(S^{n-1})$ — компакт. Так как сфера S^{n-1} выбрана так, что

$$f^{-1} f(S^{n-1}) \cap f^{-1}(y) = 0,$$

то $f^{-1} f(S^{n-1})$ разбивает W и, следовательно,

$$H_{n-1}(f^{-1} f(S^{n-1})) \neq 0,$$

где H_{n-1} — гомологии Александрова — Чеха.

По теореме Вьеториса — Бегла отображение $f: f^{-1} f(S^{n-1}) \to f(S^{n-1})$ сохраняет гомологии. Поэтому $H_{n-1}(f(S^{n-1})) \neq 0$ и, следовательно, $f(S^{n-1})$ разбивает U.

Пусть $A = f^{-1}f(S^{n-1}) \cup$ ограниченные компоненты $W \setminus f^{-1}f(S^{n-1})$, $B = f(S^{n-1}) \cup$ ограниченные компоненты $U \setminus f(S^{n-1})$. Так как $f: A \to B$ — монотонное отображение «на», то

$$f^{-1}(O) \subset A \subset W,$$

где O — произвольное открытое множество такое, что

$$O \subset B, \ O \supset y,$$

что и доказывает компактность отображения f.

Теорема доказана.

Следующая теорема следует, конечно, из критерия точечного отображения и теоремы Уайтхеда. Докажем ее без использования результатов Уайтхеда: это может оказаться полезным в других случаях.

Теорема 2. *Пусть M, M_1 — произвольные замкнутые многообразия. Если существует точечное отображение $f: M \to M_1$, то эти многообразия гомотопически эквивалентны, причем отображение f является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Нужно доказать существование отображения $g: M_1 \to M$ такого, что

gf гомотопно 1_M, fg гомотопно 1_{M_1},

где 1_M, 1_{M_1} — тождественные отображения, соответственно, многообразий M и M_1.

(N) Выберем такое покрытие $\{O_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots, i_0$), что если $\varphi, \psi: X \to M_1$, где X — произвольный конечный полиэдр, два отображения таких, что

$$(\varphi(x) \cup \psi(x)) \subset O(x), \quad x \in X, \quad O(x) \in \{O_i\}_i,$$

то отображения φ и ψ гомотопны [6].

Заметим, что множества $\{f^{-1}(O_i)\}_i = \{\widetilde{O}_i\}_i$ образуют покрытие многообразия M.

Следующее предложение (Π) — очевидное следствие леммы [2].

(Π) Пусть $f: M \to M_1$ — точечное отображение замкнутых многообразий и $\{O_i\}_i$ — покрытие M_1, удовлетворяющее условию (N).

Тогда, если отображения $\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}: X \to M$, где X — произвольный конечный полиэдр, таковы, что

$$(f\widetilde{\varphi}(x) \cup f\widetilde{\psi}(x)) \subset O_{(x)}, \quad O_{(x)} \in \{O_i\}_i,$$

то отображения $\widetilde{\varphi}$ и $\widetilde{\psi}$ гомотопны.

Далее, согласно лемме [2] отображение $g: M_1 \to M$ может быть выбрано так, что

$$\operatorname{diam}(fg(x) \cup x) < \delta,$$

где $x \in M_1$, а δ — лебегово число покрытия $\{O_i\}_i$.

Тогда для произвольной точки $x \in M_1$ найдется такой элемент O покрытия $\{O_i\}_i$, что

$$(g(x) \cup f^{-1}(x)) \subset \widetilde{O},$$

где $\widetilde{O} = f^{-1}(O)$, т. е. для произвольной точки $\widetilde{x} \in M$

$$(gf(\widetilde{x}) \cup \widetilde{x}) \subset \widetilde{O}, \quad \widetilde{O} \in \{\widetilde{O}_i\}_i.$$

Таким образом, отображения $gf: M \to M$ и $1_M: M \to M$ удовлетворяют предложению (Π) и, следовательно, гомотопны.

Согласно условию (N) удовлетворяется и соотношение $fg \sim 1_{M_1}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Bing, Decomposition of E^3, Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice — Hall, 1962, 5—21.
2. В. П. Компаниец, Гомотопический критерий точечного отображения, УМЖ, № 4, 1966.
3. W. Browder, Structures on $M \times R$, Proc. Cambr. Phil. Soc., v. 61, 1965, 337—345.
4. E. H. Connel, Images of E^n under acyclic maps, Amer. Jour. Math., N 4, 1961, 787—790.
5. St. Armentrout, Upper semi-continuous decomposition of E^3 with at most countably many non-degenerate elements, Ann. Math., v. 78, N 3, 1963, 605—618.
6. M. H. A. Newman, Local connections in locally compact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., v. 1, 1950, 44—53.

Поступила 7.III 1967 г.
Институт математики АН УССР