УДК 517.948.32:517.544

О краевых задачах со сдвигом и сопряжением для системы аналитических функций

Г. С. Литвинчук, Э. Г. Хасабов

В настоящем сообщении рассматриваются различные обобщения краевой задачи типа задачи Карлемана, исследованной авторами в статье [1].

§ 1. Найти вектор $\Phi(z)$, мероморфный в области D^+, ограниченной простой замкнутой кривой Ляпунова L, по краевому условию на L

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{\Phi^+(t)} + g(t), \tag{1}$$

где квадратная матрица $G(t)$ и вектор $g(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на L $(G(t),\ g(t) \in H(L))$, $G(t) \neq 0$ на L; функция $\alpha(t)$ $(\alpha'(t) \neq 0,\ \alpha'(t) \in H(L))$ переводит контур L в себя с сохранением ориентации на L и удовлетворяет условию $\alpha_m(t) \equiv t$, где m — любое четное положительное число, причем символ $\alpha_m(t)$ обозначает m-ю итерацию функции $\alpha(t)$.

Рассмотрим однородную задачу (1). Последовательно заменяя в краевом условии (1) t на $\alpha(t)$, имеем

$$\Phi^+[\alpha_n(t)] = G[\alpha_{n-1}(t)]\overline{\Phi^+[\alpha_{n-1}(t)]}, \quad n = 1, 2, \ldots, m. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{gathered} G_{2k-1}(t) = \overline{G[\alpha_{2k-2}(t)]}\, G[\alpha_{2k-3}(t)] \ldots G[\alpha(t)]\,\overline{G(t)}, \\ G_{2k}(t) = G[\alpha_{2k-1}(t)]\,\overline{G[\alpha_{2k-2}(t)]} \ldots G[\alpha(t)]\,\overline{G(t)}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\alpha_0(t) \equiv t,\ k = 1, 2, \ldots, \dfrac{m}{2}$.

Последовательно применяя равенства (2), имеем

$$\Phi^+[\alpha_{2k-1}(t)] = \overline{G_{2k-1}(t)}\,\overline{\Phi^+(t)}, \qquad \Phi^+[\alpha_{2k}(t)] = G_{2k}(t)\,\Phi^+(t). \tag{4}$$

Отсюда, полагая $k = \dfrac{m}{2}$ и учитывая, что $\alpha_m(t) \equiv t$, получаем необходимое условие разрешимости однородной задачи (1)

$$G_m(t) \equiv G[\alpha_{m-1}(t)]\,\overline{G[\alpha_{m-2}(t)]} \ldots G[\alpha(t)]\,\overline{G(t)} = E, \tag{5}$$

где E — единичная матрица

Используя (5), заключаем, что

$$G_{2k-1}^{-1}(t) = G[\alpha_{m-1}(t)]\,\overline{G[\alpha_{m-2}(t)]}\ldots G[\alpha_{2k-1}(t)],$$

$$G_{2k}^{-1}(t) = G[\alpha_{m-1}(t)]\,\overline{G[\alpha_{m-2}(t)]}\ldots \overline{G[\alpha_{2k}(t)]}.$$

Рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу:

$$\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \{G_{2k-1}^{-1}(t)\overline{\Phi^{+}[\alpha_{2k-1}(t)]} - G_{2k-2}^{-1}(t)\,\Phi^{+}[\alpha_{2k-2}(t)]\} = 0, \tag{6}$$

где

$$G_0(t) \equiv E.$$

Решение задачи (6) ищем в классе функций, представимых интегралами типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + R(z), \tag{7}$$

с плотностью, удовлетворяющей условию

$$\varphi[\alpha(t)] = G(t)\,\overline{\varphi(t)}, \tag{8}$$

где $R(z)$ — заданная главная часть искомого вектора $\Phi(z)$ в области D^{+}.

Так как каждое решение однородной задачи (1) принадлежит указанному классу и, в силу (4), является решением задачи (6), то таким путем найдем все решения однородной задачи (1).

Находя предельные значения (7) и используя при этом (8), приводим краевую задачу (6) к системе сингулярных интегральных уравнений первого рода нормального типа

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \left\{ \frac{G_{2k-1}^{-1}(t)\,G_{2k-1}(\tau)\,\overline{\alpha_{2k-1}'(\tau)\,\tau'^{2}(\sigma)}}{\overline{\alpha_{2k-1}(\tau)} - \overline{\alpha_{2k-1}(t)}} + \frac{G_{2k-2}^{-1}(t)\,\alpha_{2k-2}'(\tau)}{\alpha_{2k-2}(\tau) - \alpha_{2k-2}(t)} \right\} \varphi(\tau)\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \{G_{2k-1}^{-1}(t)\,\overline{R[\alpha_{2k-1}(t)]} - G_{2k-2}^{-1}(t)\,R[\alpha_{2k-2}(t)]\}, \tag{9}$$

где

$$\alpha_n'(t) = \frac{d}{dt}[\alpha_n(t)] = \alpha'[\alpha_{n-1}(t)]\ldots\alpha'[\alpha(t)]\,\alpha'(t).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в следующем: если $\varphi(t)$ — решение системы (9), то векторы

$$\varphi_{2k-1}(t) = G_{2k-1}^{-1}(t)\,\overline{\varphi[\alpha_{2k-1}(t)]}, \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2},$$

$$\varphi_{2k}(t) = G_{2k}^{-1}(t)\,\varphi[\alpha_{2k}(t)], \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2} - 1$$

также являются решениями системы (9).

Следовательно, вектор

$$\sigma(t) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \{G_{2k-1}^{-1}(t)\,\overline{\varphi[\alpha_{2k-1}(t)]} + G_{2k}^{-1}(t)\,\varphi[\alpha_{2k}(t)]\}$$

будет решением системы (9), удовлетворяющим условию (8). Отсюда следует, что вектор (7) представляет собой решение задачи (6).

Краевую задачу

$$\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \{G_{2k-1}^{-1}(t)\overline{\Phi^{-}[\alpha_{2k-1}(t)]} - G_{2k-2}^{-1}(t)\,\Phi^{-}[\alpha_{2k-2}(t)]\} = 0$$

назовем задачей, сопутствующей задаче (1), а краевую задачу

$$\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \{G_{2k-1}^{'}(t)\,\overline{\Psi^{+}[\alpha_{2k-1}(t)]\,\alpha_{2k-1}^{'}(t)\,t^{'2}(s)} - G_{2k-2}^{'}(t)\,\Psi^{+}[\alpha_{2k-2}(t)]\,\alpha_{2k-2}^{'}(t)\} = 0$$

— задачей, союзной задаче (6). (Через G' обозначена матрица, транспонированная из G). Справедлива следующая

Теорема. *При выполнении условий: 1) задача, сопутствующая задаче* (1), *не имеет аналитических решений, исчезающих на бесконечности, 2) задача, союзная задаче* (6), *не имеет аналитических решений, система уравнений* (9) *разрешима, и из ее решения указанным выше способом получаются все решения однородной задачи* (1).

Заметим, что всегда возможно подобрать такое целое число r, что для задачи

$$\Phi_1^{+}[\alpha(t)] = [\alpha(t)]^{r}\,\bar{t}^{r}G(t)\,\overline{\Phi_1^{+}(t)} \tag{10}$$

условия формулированной теоремы будут выполнены; при этом решения задачи (1) получаются из решений задачи (10) по формуле

$$\Phi(z) = z^{-r}\Phi_1(z).$$

Аналогично можно получить все решения неоднородной задачи (1). Для разрешимости неоднородной задачи (1), кроме условия (5), как легко видеть, обязательно должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} \{G_{2k-1}^{-1}(t)\,\overline{g[\alpha_{2k-2}(t)]} + G_{2k}^{-1}(t)\,g[\alpha_{2k-1}(t)]\} = 0.$$

§ 2. Предполагая $m = 2$, рассмотрим следующую краевую задачу на L:

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] = A(t)\,\Phi^{+}(t) + B(t)\,\overline{\Phi^{+}(t)} + C(t). \tag{11}$$

Здесь матрицы $A(t) \in H(L)$, $B(t) \in H(L)$ и вектор $C(t) \in H(L)$ обязательно должны удовлетворять на L условиям:

$$\begin{gathered} A(t)\,A[\alpha(t)] + B(t)\,\overline{B[\alpha(t)]} = E, \\ A(t)\,B[\alpha(t)] + B(t)\,A[\alpha(t)] = 0, \\ A(t)\,C[\alpha(t)] + B(t)\,\overline{C[\alpha(t)]} + C(t) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Ограничимся формулированием окончательного результата: общее решение задачи (11) дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{L} \frac{\varphi(\tau) + A[\alpha(\tau)]\,\varphi[\alpha(\tau)] + B[\alpha(\tau)]\,\varphi[\alpha(\tau)] + C[\alpha(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau + R(z),$$

где $R(z)$ — главная часть вектора $\Phi(z)$ в D^{+}, а $\varphi(t)$ — решение системы сингулярных уравнений нормального типа

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left[\frac{A(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-\frac{\lambda A(t)}{\tau-t}\right]\varphi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left[\frac{B(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda B(t)\overline{\tau'^2(\sigma)}}{\bar\tau-\bar t}\right]\overline{\varphi(\tau)}d\tau=-\lambda R[\alpha(t)]+\lambda A(t)R(t)+\lambda B(t)\overline{R(t)}-$$

$$-\frac{\lambda}{2}C(t)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{C(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}d\tau.$$

Здесь $\lambda = 1$, если $\alpha(t)$ сохраняет ориентацию на L, $\lambda = -1$, если $\alpha(t)$ изменяет ориентацию на L. Последний случай ($\lambda = -1$) был ранее рассмотрен Н. П. Векуа [2].

В заключение приведем некоторые соображения о необходимых условиях разрешимости краевой задачи

$$a(t)\Phi^+[\alpha(t)]+b(t)\overline{\Phi^+[\alpha(t)]}+c(t)\Phi^+(t)+d(t)\overline{\Phi^+(t)}=h(t), \qquad (13)$$

где сдвиг $\alpha(t)$ (прямой или обратный) удовлетворяет условию $\alpha[\alpha(t)]\equiv t$, т. е. $m = 2$.

Если искать решение задачи (13) в виде интеграла типа Коши с вещественной плотностью $\mu(t)$, то краевое условие (13) окажется равносильным системе четырех интегральных уравнений с вещественными коэффициентами и с двумя неизвестными вещественными функциями $\mu[\alpha(t)]$ и $\mu(t)$. Так как два из этих четырех уравнений должны быть следствиями двух других, то коэффициенты задачи (13) должны удовлетворять некоторым условиям. Не станем здесь выписывать эти условия из-за их довольно громоздкого вида. Отметим только, что при $b(t)\equiv 0$, $a(t)\equiv 1$, $c(t)\equiv -A(t)$, $d(t)\equiv -B(t)$ из этих условий вытекают условия (12), а при $b(t)=\overline{a(t)}$, $d(t)=\overline{c(t)}$ указанные условия выполняются автоматически. Последний случай задачи (13) был изучен авторами в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Литвинчук, Э. Г. Хасабов, К теории сингулярных интегральных уравнений, подчиняющихся альтернативе Фредгольма, ДАН СССР, т. 140, № 1, 1961.
2. Н. П. Векуа, Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций, Изв. АН СССР, т. 20, № 3, 1956.
3. Г. С. Литвинчук, Э. Г. Хасабов, О краевой задаче Гильберта со сдвигом, ДАН СССР, т. 142, № 2, 1962.

Поступила 11.XI 1965 г.

Одесский гос. университет,
Ростовский гос. университет