УДК 517.54+627.821

О расчете обходной фильтрации за устоем при сопряжении водосливной плотины с пойменной земляной плотиной

В. Г. Дегтярь

Рассматриваемая в статье задача обходной фильтрации имеет место для устоя водосливной плотины, возведенной на высокой пойме, когда дренаж примыкающей к устою земляной плотины осуществляется одной общей дреной, устраиваемой за низовыми стенками устоя и на откосе отводящего канала [2]. Тело земляной плотины отдельного дренажа не имеет.

В отличие от работы [2], где данная задача решена приближенно, методом фрагментов, приводится точное гидромеханическое решение.

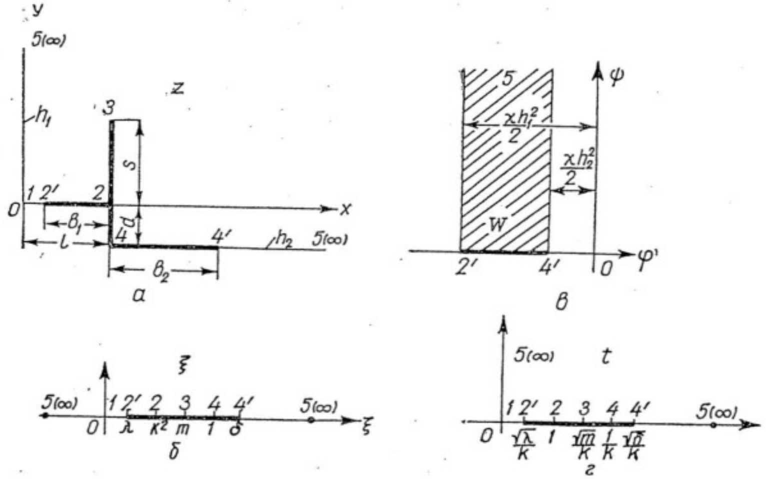
При решении задачи предполагается, что тело и основание земляной плотины сложены из однородного грунта и располагаются на горизонтальном водоупоре; водопроницаемые границы приняты вертикальными; движение фильтрационного потока установившееся и подчиняется закону Дарси.

Область фильтрации z, область комплексного потенциала $W = -\frac{\varkappa h^2}{2} + iQ$ и вспомогательные области ζ и t приведены на рисунке. Граничные условия следующие: на $5-1-2'$ $h = h_1 = \mathrm{const}$; на $4'-5$ $h = h_2 = \mathrm{const}$ и вдоль $2'-2-3-4-4'$ $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$. Задачу решаем методом конформных отображений. Функция, отображающая полуплоскость ζ на область фильтрации z при принятой на рисунке нормировке, запишется интегралом Кристоффеля — Шварца:

$$z = C \int\limits_0 \frac{(\zeta - m)\, d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta - k^2)(\zeta - 1)}}. \tag{1}$$

Введем новую переменную $t = \frac{\sqrt{\zeta}}{k}$, область изменения которой приведена на рисунке. Тогда после простых преобразований (1) перепишется в виде комбинации эллиптических интегралов первого и второго рода при модуле k:

$$z = 2C\left[(1-m)\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} - \int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt\right].$$



Или, переходя к тригонометрической форме эллиптических интегралов, получим

$$z = 2C\,[(1-m)\,F\,(\varphi;\,k) - E\,(\varphi;\,k)], \qquad (2)$$

где $\varphi = \arcsin t$.

Для определения неизвестных постоянных k и m воспользуемся соответствием точек $z = l$, $t = 1$; $z = l + is$, $t = \frac{\sqrt{m}}{k}$; $z = l - id$, $t = \frac{1}{k}$. Из соответствия первой пары точек получим:

$$l = 2C\,[(1-m)\,K - E], \qquad (3)$$

где K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответствующие модулю k. Из соответствия второй пары получаем:

$$s = 2C\,\{m\,[F\,(\varphi_1;\,k') - K'] - E\,(\varphi_1;\,k') + E'\}, \qquad (4)$$

где $\varphi_1 = \arcsin\sqrt{\frac{1-m}{k'^2}}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$. Наконец соответствие третьей пары точек дает:

$$d = 2C\,[mK' - E'], \qquad (5)$$

где $K' = K(k')$ и $E' = E(k')$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода при дополнительном модуле k'.

Разделив (4) и (5) на (3), получим систему двух уравнений для определения постоянных k и m:

$$\frac{s}{l} = \frac{m\,[F\,(\varphi_1;k') - K'] - E\,(\varphi_1;\,k') + E'}{(1-m)K - E};$$

$$\frac{d}{l} = \frac{mK' - E'}{(1-m)K - E}. \tag{6}$$

Определив из (6) k и m, находим постоянную C из (3):

$$C = \frac{l}{2\,[(1-m)\,K - E]}.$$

Теперь отображающая функция запишется в виде

$$z = C_1\,[(1-m)\,F\,(\varphi;\,k) - E\,(\varphi;\,k)], \tag{7}$$

где

$$C_1 = \frac{l}{(1-m)K - E}. \tag{8}$$

Необходимые в дальнейшем величины λ и δ, характеризующие начало и конец устоя в области ζ, найдем, подставив в (7) $z = l - b_1$, $t = \frac{\sqrt{\lambda}}{k}$ и $z = (l + b_2) - id$, $t = \frac{\sqrt{\delta}}{k}$,

$$l - b_1 = C_1\,[(1-m)\,F\,(\varphi;\,k) - E\,(\varphi;\,k)], \tag{9}$$

где $\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{\lambda}}{k}$, $0 < \lambda < k^2$;

$$b_2 = C_1\,\{(1-m)\,[K - F\,(\varphi;\,k)] + E\,(\varphi;\,k) + \operatorname{ctg}\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} - E\}, \tag{10}$$

где $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{\delta}}$; $\delta > 1$.

Отметим, что при $d = 0$ система (6) значительно упрощается

$$\frac{s}{l} = \frac{2K'}{\pi}\,[E\,(\varphi_1;\,k') - mF\,(\varphi_1;\,k')];\; m = \frac{E'}{K'}, \tag{11}$$

и отображающая функция (7) принимает вид:

$$z = \frac{2l}{\pi}\,[K' \cdot E\,(\varphi;\,k) - (K' - E')\,F\,(\varphi;\,k)]. \tag{12}$$

Для завершения задачи необходимо еще отобразить область комплексного потенциала W, представляющую бесконечную полуполосу, на полуплоскость ζ.

Отображение осуществляется функцией:

$$W = \varkappa\frac{h_1^2 - h_2^2}{2\pi}\arcsin\frac{2\zeta - (\delta + \lambda)}{\delta - \lambda} - \varkappa\frac{h_1^2 + h_2^2}{4}. \tag{13}$$

Используя соответствие между W и ζ на основных границах исследуемой области фильтрации, получим зависимости для определения величин h и Q на этих границах. Глубина фильтрационного потока вдоль контура устоя и диафрагмы

$$h = \sqrt{(h_1^2 - h_2^2)\,h_r + h_2^2}, \tag{14}$$

где h_r — приведенный напор в данной точке, определяемый по формуле:

$$h_r = \frac{1}{\pi}\arccos\xi; \tag{15}$$

$$\bar{\xi} = \frac{2\xi - (\delta + \lambda)}{\delta - \lambda}\,. \tag{16}$$

Расход по линии уреза воды в нижнем бьефе:

$$Q = \varkappa \frac{h_1^2 - h_2^2}{2}\, q_r, \tag{17}$$

где q_r — приведенный расход в данной точке, определяемый по формуле:

$$q_r = \frac{1}{\pi} \operatorname{arch} \bar{\xi}. \tag{18}$$

Величины h_r и q_r находятся также по номограммам, составленным П. Ф. Фильчаковым [3]. Дифференцируя выражения (13) и (1) и принимая $\zeta = \xi$, найдем выходную скорость по линии нижнего бьефа:

$$v_y = \varkappa \frac{(h_1^2 - h_2^2)\,[(1 - m)\,K - E]}{2\pi l\,(\xi - m)} \sqrt{\frac{\xi\,(\xi - k^2)\,(\xi - 1)}{(\xi - \lambda)\,(\xi - \delta)}}\,. \tag{19}$$

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим пример, ограничиваясь определением h вдоль контура устоя, при следующих данных:

$= 49$ *м*; $l = 43$ *м*; $d = 17{,}2$ *м*; $b_1 = 0$; $b_2 = 50$ *м*; $h_1 = 25$ *м*; $h_2 = 12$ *м*.

Тогда, пользуясь полученными формулами и таблицами [1] и [3], находим распределение h вдоль контура устоя, приведенное в следующей таблице:

Точки	1	2	3	4	5	6	7	8
x	43,0	43,0	43,0	43,0	43,0	83,8	86,5	93,0
y	0	37,6	49,0	33,1	—17,2	—17,2	—17,2	—17,2
h	25,0	23,0	22,4	20,8	18,2	15,5	14,8	12,0

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Беляков, Р. И. Кравцова, М. Г. Раппопорт, Таблицы эллиптических интегралов, т. I, Изд-во АН СССР, М., 1962.
2. В. П. Недрига, Сопрягающие устройства бетонных плотин, Госстройиздат, М., 1960.
3. П. Ф. Фильчаков, Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями, т. 1 и 2, Изд-во АН УССР, К., 1959—1960.

Поступила 23.V 1967 г.

Институт математики АН УССР