УДК 519

Асимптотическая нормальность распределения решения стохастического диффузионного уравнения

Г. Л. Кулинич

Рассмотрим одномерное стохастическое интегральное уравнение (см. [1], гл. 8)

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(\xi(s))\,ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))\,dw(s), \tag{1}$$

где $\xi(0)$ — заданная случайная величина, независимая от процесса броуновского движения $w(t)$. Для решения уравнения (1) при определенных условиях гладкости коэффициентов $a(x)$ и $\sigma(x)$ автором получены следующие результаты.

1. Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a(x)}{\sigma^2(x)} - \frac{1}{2}\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\right] dx = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{x}\int_0^x \frac{du}{\sigma(u)} \to \sigma_0$$

при $|x| \to \infty$, то распределение $\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}}$ при $t \to \infty$ асимптотически нормально с параметрами $\left(0, \frac{1}{\sigma_0}\right)$ (см. [4]).

2. Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a(x)}{\sigma^2(x)} - \frac{1}{2}\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\right] dx = \lambda,$$

то для процесса $\frac{f(\xi(tT))}{\sqrt{T}}$ при $T \to \infty$ получена плотность распределения (см. [5]), где

$$f(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_{-\infty}^{y} \left[\frac{a(u)}{\sigma^2(u)} - \frac{1}{2}\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right] du\right\} \frac{dy}{\sigma(y)}.$$

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема. *Пусть* $\xi(t)$ — *решение уравнения* (1), $\mathbf{M}\xi^2(0) < \infty$. *Если:*
1) $a(x)$, $\sigma(x)$ — *непрерывные ограниченные функции*, $\sigma(x) \geqslant \delta > 0$, *для любых* x_1, x_2

$$|a(x_1) - a(x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2|, \qquad |\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2|,$$

где K — *некоторая постоянная;*

2) $\frac{1}{x}\int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}\,dv\right\} du \to \sigma_1$ *при* $|x| \to \infty$;

3) $\frac{1}{x}\int_0^x \exp\left\{2\int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}\,dv\right\} \frac{du}{\sigma^2(u)} \to \sigma_2$ *при* $|x| \to \infty$,

тогда распределение случайной величины $\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}}$ *при* $t \to \infty$ *асимптотически нормально с параметрами* $\left(0, \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_2}}\right)$.

Доказательство. Введем функцию

$$g(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}\,dv\right\} du$$

и обозначим процесс $g(\xi(t))$ через $\eta(t)$, $\exp\left\{-2\int_0^x \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}\,dv\right\}$ через $f(x)$, а через $\varphi(x)$ обозначим функцию, обратную к функции $g(x)$.

По формуле Ито (см. [2], § 2, гл. 2, теорема 5) имеем:

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t f(\xi(s))\,\sigma(\xi(s))\,dw(s). \tag{2}$$

Поэтому процесс $\eta(t)$ удовлетворяет стохастическому интегральному уравнению

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t f(\varphi(\eta(s)))\,\sigma(\varphi(\eta(s)))\,dw(s).$$

Рассмотрим случайную замену времени в процессе броуновского движения $w(t)$, определяемую из соотношения

$$\int_0^{\tau_t} \frac{1}{f^2[\varphi(w(s))]\,\sigma^2[\varphi(w(s))]}\,ds = t.$$

Отсюда следует

$$\tau_t = \int_0^t f^2[\varphi(w(\tau_s))]\,\sigma^2[\varphi(w(\tau_s))]\,ds.$$

Характеристический оператор $\widetilde{\mathfrak{A}}$ процесса $w(\tau_t)$ связан с характеристическим оператором $\mathfrak{A}$ процесса $w(t)$ соотношением

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = f^2(\varphi(x))\,\sigma^2(\varphi(x))\,\mathfrak{A}$$

(см. [3], гл. 10, § 5, теорема 10. 12). Следовательно, производящий дифференциальный оператор процесса $\eta(t)$ совпадает с производящим дифференциальным оператором процесса $w(\tau_t)$. Легко проверить, что функция $f^2(\varphi(x))\,\sigma^2(\varphi(x))$ удовлетворяет условию Липшица. Поэтому (см. [3], гл. 5, § 6, следствие к теореме 5.10) процессы $\eta(t)$ и $w(\tau_t)$ эквивалентны. Значит, распределение τ_t совпадает с распределением случайной величины $\int_0^t f^2(\xi(s))\,\sigma^2(\xi(s))\,ds$. Покажем, что случайная величина $\frac{1}{t}\int_0^t f^2(\xi(s))\,\sigma^2(\xi(s))\,ds$ сходится по вероятности к $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ при $t \to \infty$. Для этого докажем лемму.

Лемма. *Если функция $f_1(x)$ непрерывная, $\frac{f_1(x)}{x} \to 0$ при $|x| \to \infty$ и $\mathbf{M}\xi^2(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то*

$$\frac{\mathbf{M}f^2(\xi(t))}{\mathbf{M}\xi^2(t)} \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Доказательство. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная C_ε, что $\left|\frac{f_1(x)}{x}\right| < \varepsilon$ при $|x| > C_\varepsilon$, поэтому

$$\frac{\mathbf{M} f_1^2(\xi(t))}{\mathbf{M}\,\xi^2(t)} = \frac{1}{\mathbf{M}\xi^2(t)} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,\varrho(t, x)\,dx = \frac{1}{\mathbf{M}\xi^2(t)} \int_{|x|\leqslant C_\varepsilon} f^2(x)\,\varrho(t, x)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\mathbf{M}\xi^2(t)} \int_{|x|>C_\varepsilon} f^2(x)\,\varrho(t, x)\,dx \leqslant \frac{\sup\limits_{|x|\leqslant C_\varepsilon} f^2(x)}{\mathbf{M}\xi^2(t)} + \varepsilon^2 \to \varepsilon^2 \text{ при } t \to \infty.$$

В силу произвольности ε следует доказательство леммы.

Из соотношения (2)

$$\mathbf{M}\eta^2(t) = \mathbf{M}\eta^2(0) + \int_0^t \mathbf{M} f^2(\xi(s))\,\sigma^2(\xi(s))\,ds.$$

Легко показать, что $\mathbf{M}\eta^2(0) < \infty$. Так как $\int_0^x \frac{a(u)}{\sigma^2(u)}\,du$ существует при любом x, а σ_1 и σ_2 конечные, то найдутся такие постоянные $\alpha > 0$ и β, что $\alpha \leqslant f(x)\,\sigma(x) \leqslant \beta$. Значит, при достаточно больших t, $0 < C_1 t \leqslant \mathbf{M}\eta^2(t) \leqslant C_2 t$, где C_1, C_2 — некоторые постоянные. Функцию $g(x)$ можем представить в виде $g(x) = \sigma_1 x + b(x)$, где $b(x)$ — непрерывная функция и $\frac{b(x)}{x} \to 0$ при $|x| \to \infty$. Тогда

$$\eta^2(t) = \sigma_1^2 \xi^2(t) + 2\sigma_1 \xi(t)\, b(\xi(t)) + b^2(\xi(t)).$$

Следовательно, $\mathbf{M}\xi^2(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и $\frac{\mathbf{M}\eta^2(t)}{\mathbf{M}\xi^2(t)} \to \sigma_1^2$. Поэтому при достаточно больших t существуют положительные постоянные $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, что

$$\overline{C}_1 \leqslant \frac{\mathbf{M}\xi^2(t)}{t} \leqslant \overline{C}_2. \tag{3}$$

Введем функцию

$$q(x) = \int_0^x \left[f(u) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1}{f(u)\cdot\sigma^2(u)} \right] du \cdot f(x).$$

Тогда по формуле Ито имеем:

$$\int_0^t \left[f^2(\xi(s))\,\sigma^2(\xi(s)) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right] ds = 2\int_0^{\xi(t)} q(x)\,dx - 2\int_0^{\xi(0)} q(x)\,dx -$$

$$- 2\int_0^t q(\xi(s))\,\sigma(\xi(s))\,dw(s). \tag{4}$$

На основании условий теоремы функции $f(x)$ и $\frac{1}{f(x)\,\sigma^2(x)}$ можно представить в следующем виде:

$$f(x) = \sigma_1 + b_1(x), \qquad \frac{1}{f(x)\,\sigma^2(x)} = \sigma_2 + b_2(x),$$

где $b_1(x)$ и $b_2(x)$ — непрерывные функции и

$$\frac{1}{x}\int_0^x b_1(u)\,du, \quad \frac{1}{x}\int_0^x b_2(u)\,du$$

стремятся к нулю при $|x| \to \infty$. Так как $f(x)$ — ограниченная функция и

$$f(x) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{1}{f(x)\,\sigma^2(x)} = b_1(x) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} b_2(x),$$

то $\frac{q(x)}{x} \to 0$ при $|x| \to \infty$, а в силу непрерывности $q(x)$

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x q(u)\,du \to 0 \text{ при } |x| \to \infty.$$

На основании леммы и (3)

$$\frac{1}{t}\mathbf{M}q^2(\xi(t)) \to 0, \qquad \frac{1}{t}\mathbf{M}\left|\int_0^{\xi(t)} q(x)\,dx\right| \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{t}\int_0^{\xi(t)} q(x)\,dx \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \text{ при } t \to \infty \tag{5}$$

и, так как $\sigma(x)$ — ограниченная функция, а $\mathbf{M}q^2(\xi(s))\,\sigma^2(\xi(s))$ — непрерывная по s, то

$$\frac{1}{t^2}\int_0^t \mathbf{M}q^2(\xi(s))\,\sigma^2(\xi(s))\,ds \to 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{6}$$

Из соотношения

$$\frac{1}{t^2}\mathbf{M}\left[\int_0^t q(\xi(s))\,\sigma(\xi(s))\,dw(s)\right]^2 = \frac{1}{t^2}\int_0^t \mathbf{M}q^2(\xi(s))\,\sigma^2(\xi(s))\,ds$$

и (6)

$$\frac{1}{t}\int_0^t q(\xi(s))\,\sigma(\xi(s))\,dw(s) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{7}$$

Из соотношений (4), (5), (7) вытекает, что

$$\frac{1}{t}\int_0^t f^2(\xi(s))\,\sigma^2(\xi(s))\,ds \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \text{ при } t \to \infty.$$

Поэтому $\frac{\tau_t}{t} \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ при $t \to \infty$.

Процесс $w_1(s) = \frac{w(st)}{\sqrt{t}}$ является броуновским процессом. Тогда

$$\frac{w(\tau_t)}{\sqrt{t}} = w_1\left(\frac{\tau_t}{t}\right) \text{ и}$$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{w(\tau_t)}{\sqrt{t}}-\frac{w\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}t\right)}{\sqrt{t}}\right|>\varepsilon\right\}=\mathbf{P}\left\{\left|w_1\left(\frac{\tau_t}{t}\right)-w_1\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\right|>\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\tau_t}{t}-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right|>\delta\right\}+\mathbf{P}\left\{\sup_{|s_1-s_2|\leqslant\delta}|w_1(s_1)-w_1(s_2)|>\varepsilon\right\}$$

стремятся к нулю в силу непрерывности с вероятностью 1 процесса $w_1(s)$, ограниченности $\frac{\tau_t}{t}$ и стремления $\frac{\tau_t}{t}$ по вероятности к $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Так как случайная величина $\frac{w\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}t\right)}{\sqrt{t}}$ имеет нормальное распределение с параметрами $\left(0, \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}\right)$, то $\frac{w(\tau_t)}{\sqrt{t}}$ имеет асимптотически нормальное распределение с теми же параметрами. Значит и $\frac{\eta(t)}{\sqrt{t}}$ имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами $\left(0, \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}\right)$.

Используя соотношение $\frac{g(x)}{x}\to\sigma_1$ при $|x|\to\infty$, можно показать, что $\frac{g(\xi(t))}{\xi(t)}\xrightarrow{\mathbf{P}}\sigma_1$ при $t\to\infty$. Из соотношения $\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}}=\frac{\xi(t)}{g(\xi(t))}\cdot\frac{g(\xi(t))}{\sqrt{t}}$ следует доказательство теоремы.

В заключение выражаю благодарность профессору А. В. Скороходу за постановку задачи и внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, изд-во «Наука», 1965.
2. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд-во Киевского ун-та, К., 1961.
3. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963.
4. Г. Л. Кулинич, Предельное поведение распределений решения стохастического диффузионного уравнения, УМЖ, т. 19, № 2, 1967.
5. Г. Л. Кулинич, Одна теорема о предельном поведении распределения решения стохастического диффузионного уравнения, Теория вероятн. и ее примен., 3, 1967.

Поступила 2.VII 1966 г.
Киевский гос. университет
им. Т. Г. Шевченко