УДК 517.531

Об одной связи между свойствами функции на границе круга и ее свойствами внутри круга

Ю. И. Волков

1. Пусть функция $f(z) = f(re^{i\theta})$ аналитична внутри круга $|z| < 1$. Если

$$\lim_{r\to 1} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{1/p} \leqslant M_1,$$

где M_1 — постоянная, не зависящая от r, то говорят, что $f(z)$ принадлежит классу H_p. Тогда, как известно [1], если $p > 0$, то функция $f(z)$ имеет почти всюду угловые граничные значения

$$f(e^{i\theta}) = F(\theta) \text{ и } \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta)|^p \, d\theta \right\}^{1/p} \leqslant M_2, \tag{1}$$

где M_2 — постоянная, а если $p \geqslant 1$, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi) P(r, \varphi - \theta) \, d\varphi, \tag{2}$$

где $P(r, \varphi) = (1 - r^2)(1 - 2r\cos\varphi + r^2)^{-1}$.

Под классом функций $H(p, \alpha)$ понимаем класс функций $f(z) \in H_p$, для которых

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta + h) - F(\theta - h)|^p \, d\theta \right\}^{1/p} \leqslant M_3 h^{\alpha},$$

$h > 0$, M_3 — постоянная, не зависящая от h, $p \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$.

Под классом функций $Z(p, 1)$ понимаем класс функций $f(z) \in H_p$, для которых

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta + h) - 2F(\theta) + F(\theta - h)|^p \, d\theta \right\}^{1/p} \leqslant M_4 h, \tag{3}$$

M_4 — постоянная, не зависящая от h, $p \geqslant 1$.

Известно [1], что для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $H(p, \alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{1/p} = O((1 - r)^{\alpha - 1}).$$

В данной работе мы доказываем аналогичный критерий принадлежности функции классу $Z(p, 1)$.

Теорема. *Для того чтобы функция $f(z)$ принадлежала классу $Z(p, 1)$,* *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:*

$$\left\{\int\limits_{|z|=r} |f''(z)|^p \, |dz|\right\}^{1/p} \leqslant \frac{M_5}{1-r},$$

M_5 *— постоянная, не зависящая от* r.

Доказательство необходимости. Так как

$$f''(z) = -\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} - i\frac{\partial f}{\partial\theta}\right),$$

то в силу (2) имеем:

$$f''(z) = -\frac{1}{2\pi z^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(F(\theta+t)\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial t^2} - iF(\theta+t)\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right)dt,$$

а так как функция $\dfrac{\partial^2 P(r,t)}{\partial t^2}$ четна и $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial t^2}\,dt = 0$, то

$$f''(z) = -\frac{1}{2\pi z^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(F(t+\theta)\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial t^2} - iF(t+\theta)\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right)dt.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского, получим:

$$\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f''(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{\frac{1}{(2\pi r^2)^p}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}(F(\theta+t) - 2F(\theta) + F(\theta-t))\right)\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial t^2} - iF(t+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\theta)\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right)dt\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M_6\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F(\theta+t) - 2F(\theta) + F(\theta-\right.$$

$$\left.-t)|^p\left|\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial t^2}\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} dt + M_7\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F(t+\theta)|^p\left|\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} dt,$$

а в силу (3) и (1) имеем

$$\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f''(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p} \leqslant M_8\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|\left|\frac{\partial^2 P(r,t)}{\partial t^2}\right|dt + M_9\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\partial P(r,t)}{\partial t}\right|dt \leqslant \frac{M_{10}}{1-r}$$

(оценки для последних интегралов можно найти, например, в [2]).

Постоянные $M_6, M_7, \ldots, M_{10}$ не зависят от r.

Этим доказательство первой части теоремы завершено.

Доказательство достаточности. Докажем сначала, что $f(z) \in H_p$. Не нарушая общности, можно положить $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$. Тогда, применяя неравенство Минковского, имеем:

$$\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\theta\left|\int\limits_{0}^{r}f'(re^{i\theta})\,dr\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \int\limits_{0}^{r}dr\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f'(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{4}$$

Проделав аналогичные преобразования с $f'(z)$, получим:

$$\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f'(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \int\limits_{0}^{r}dr\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f''(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}},$$

но по условию выражение в фигурных скобках равно $O\left(\frac{1}{1-r}\right)$ и, следовательно,

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M_{11} \ln \frac{1}{1-r}.$$

Подставляя эту оценку в (4), получим:

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p} \leqslant M_{12} \int_0^r \ln \frac{1}{1-r}\, dr \leqslant M_{13},$$

M_{11}, M_{12}, M_{13} — постоянные, не зависящие от r. А это и означает, что $f(z) \in H_p$.

Докажем вспомогательные утверждения. 1. Если $g(z) = zf'(z)$, то

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |g'(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p} \leqslant M_{14} \frac{1}{1-r}. \tag{5}$$

Действительно, так как $g'(z) = f'(z) + zf''(z)$, то

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |g'(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |re^{i\theta} f''(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p} \leqslant M_{15} \ln \frac{1}{1-r} + M_{16} \frac{1}{1-r} \leqslant \frac{M_{17}}{1-r}. \tag{6}$$

2.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon f'((1-\varepsilon)e^{ix}) = 0 \tag{7}$$

почти при всех x. Это следует из того, что

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\varepsilon f'((1-\varepsilon)e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M_{18} \varepsilon |\ln \varepsilon|.$$

3. Пусть $0 < h < 1$, $\zeta = e^{ix}$, $\zeta_h = (1-h)e^{ix}$, тогда почти при всех x:

$$f(\zeta) = f(\zeta_h) + (\zeta - \zeta_h) f'(\zeta_h) + \int_{\zeta_h}^{\zeta} (\zeta - z) f''(z)\, dz, \tag{8}$$

где интегрирование производится по радиусу.

Действительно, так как $f(z)$ аналитична внутри круга, то интегрированием по частям получим:

$$f(\zeta_\varepsilon) = f(\zeta_h) + [(z-\zeta) f'(z)]_{\zeta_h}^{\zeta_\varepsilon} + \int_{\zeta_h}^{\zeta_\varepsilon} (\zeta - z) f''(z)\, dz$$

и (8) получается из (7) переходом к пределу при $\varepsilon \to 0$.

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_2 f = f(e^{i(x+h)}) - 2f(e^{ix}) + f(e^{i(x-h)});$$

$$\zeta^+ = e^{i(x+h)}; \quad \zeta^- = e^{i(x-h)}; \quad \zeta_h^+ = (1-h)e^{i(x+h)}; \quad \zeta_h^- = (1-h)e^{i(x-h)}.$$

Для почти всех x из (8) получим:

$$\Delta_2 f = f(\zeta_h^+) + (\zeta^+ - \zeta_h^+) f'(\zeta_h^+) + \int_{\zeta_h^+}^{\zeta^+} (\zeta^+ - z) f''(z)\, dz -$$

$$-2f(\zeta_h)-2(\zeta-\zeta_h)f'(\zeta_h)-2\int_{\zeta_h}^{\zeta}(\zeta-z)f''(z)\,dz+f(\zeta_h^-)+$$

$$+(\zeta^--\zeta_h^-)f'(\zeta_h^-)+\int_{\zeta_h^-}^{\zeta^-}(\zeta^--z)f''(z)\,dz=\int_{\zeta_h}^{\zeta_h^+}f'(z)\,dz+$$

$$+\int_{\zeta_h}^{\zeta_h^-}f'(z)\,dz+\frac{h}{1-h}g(\zeta_h^+)-\frac{2h}{1-h}g(\zeta_h)+\frac{h}{1-h}g(\zeta_h^-)+$$

$$+\int_{\zeta_h^+}^{\zeta^+}(\zeta^+-z)f''(z)\,dz+\int_{\zeta_h^-}^{\zeta^-}(\zeta^--z)f''(z)\,dz-2\int_{\zeta_h}^{\zeta}(\zeta-z)f''(z)\,dz=$$

$$=\int_x^{x+h}f'((1-h)e^{it})\,i(1-h)e^{it}dt+\int_x^{x-h}f'((1-h)e^{it})\,i(1-h)e^{it}dt+$$

$$+\frac{h}{1-h}\int_{\zeta_h}^{\zeta_h^+}g'(z)\,dz+\frac{h}{1-h}\int_{\zeta_h}^{\zeta_h^-}g'(z)\,dz+\int_{\zeta_h^+}^{\zeta^+}(\zeta^+-z)f''(z)\,dz+$$

$$+\int_{\zeta_h^-}^{\zeta^-}(\zeta^--z)f''(z)\,dz-2\int_{\zeta_h}^{\zeta}(\zeta-z)f''(z)\,dz=i\int_0^h dt\int_{\zeta_h^-}^{\zeta_h^+}g'(z)\,dz+$$

$$+\frac{h}{1-h}\int_{\zeta_h}^{\zeta_h^+}g'(z)\,dz+\frac{h}{1-h}\int_{\zeta_h}^{\zeta_h^-}g'(z)\,dz+\int_{\zeta_h^+}^{\zeta^+}(\zeta^+-z)f''(z)\,dz+$$

$$+\int_{\zeta_h^-}^{\zeta^-}(\zeta^--z)f''(z)\,dz-2\int_{\zeta_h}^{\zeta}(\zeta-z)f''(z)\,dz.$$

Применяя неравенство Минковского, из (9) получим:

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\Delta_2 f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\left\{\int_{-\pi}^{\pi}dx\left|\int_0^h dt\int_{\zeta_h^-}^{\zeta_h^+}g'(z)\,dz\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\frac{h}{1-h}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}dx\left|\int_{\zeta_h}^{\zeta_h^+}g'(z)\,dz\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\frac{h}{1-h}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}dx\left|\int_{\zeta_h}^{\zeta_h^-}g'(z)\,dz\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left\{\int_{-\pi}^{\pi}dx\left|\int_{\zeta_h}^{\zeta^+}(\zeta^+-z)f''(z)\,dz\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\int_{-\pi}^{\pi}dx\left|\int_{\zeta_h^-}^{\zeta^-}(\zeta^--z)f''(z)\,dz\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+2\left\{\int_{-\pi}^{\pi}dx\left|\int_{\zeta_h}^{\zeta}(\zeta-z)f''(z)\,dz\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6.$$

Оценим каждое из слагаемых этой суммы. В силу (6):

$$I_1 = \left\{\int_{-\pi}^{\pi} dx \left| \int_0^h dt \int_{\zeta_h^-}^{\zeta_h^+} g'(z)\,dz \right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^h dt \left\{\int_{-\pi}^{\pi} dx \left| \int_{x-t}^{x+t} ie^{i\varphi}(1-h)\,g'((1-h)\,e^{i\varphi})\,d\varphi \right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^h dt \int_{-t}^{t} d\varphi \left\{\int_{-\pi}^{\pi} \left|(1-h)\,g'((1-h)\,e^{i(\varphi+x)})\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M_{19}h.$$

Учитывая (6) и условие теоремы, аналогично оцениваются и остальные слагаемые. Итак,

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_2 f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M_{20}h,$$

что и означает, что $f(z) \in Z(p, 1)$.

2. Применяя приведенную выше методику доказательства, нетрудно обобщить эту теорему на класс функций $f(z) \in Z(p, \omega)$, т. е. функций, удовлетворяющих условиям:

$$f(z) \in H_p \text{ и } \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_2 f|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \omega(h),$$

$\omega(h)$ — некоторая функция типа модуля непрерывности, например, такими функциями будут

$$\omega(h) = h^\alpha,\ 0 < \alpha < 2; \quad \omega(h) = h^\alpha \log\frac{1}{h},\ 0 < \alpha < 2$$

и др.

В этом случае необходимым и достаточным условием принадлежности функции $f(z)$ классу $Z(p, \omega)$ является выполнение неравенства

$$\left\{\int_{|z|=r} |f''(z)|^p\,|dz|\right\}^{1/p} \leqslant \mathrm{const}\,\frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}.$$

В заключение выражаю благодарность В. К. Дзядыку за ценные замечания по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals. II, M.Z., vol. 34, 1932, 403—439.
2. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. I, изд-во «Мир», М., 1965.
3. Р. Н. Ковальчук, О модулях непрерывности функций, заданных в замкнутом круге, Тр. I Респ. научн. конф. молодых исследователей, изд-во «Наукова думка», К., 1965.
4. J. L. Walsh, H. M. Elliot, Polinomial approximation to harmonic and analytic funktions; generalised continuity conditions, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 68, 1950, 183—203.

Поступила 15.IV 1967 г.,
после переработки — 18.IX 1967 г.
Винницкий филиал КПИ