УДК 517.948.32

Приближенное решение одного класса особых интегральных уравнений со сдвигом методом осреднения функциональных поправок

В. Г. Иваницкий

Особые интегральные уравнения с ядрами, содержащими сдвиги, встречаются при решении краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптико-гиперболического (смешанного) типа.

Этим, прежде всего, объясняется большое внимание, уделяемое в последнее время исследованию таких уравнений [1—3].

Ф. Д. Гахов и А. И. Чибрикова в работе [4] рассмотрели несколько типов особых интегральных уравнений, включающих в себя в качестве частных случаев уравнения, изучавшиеся предыдущими авторами.

Особое интегральное уравнение со сдвигом сводится к более общей, чем задача Римана, краевой задаче для аналитических функций, и решение его не будет, вообще говоря, иметь замкнутой формы.

В связи с этим целесообразно рассмотреть вопрос о приближенном решении особых интегральных уравнений со сдвигом.

Ю. В. Девингталь в работе [5] рассмотрел модификацию метода последовательных приближений, примененную к решению особых интегральных уравнений вида

$$\varphi(t)+\int_0^1 \frac{K(\alpha(t),\tau)\varphi(\tau)}{\tau-\alpha(t)}\,d\tau=\Phi(t).$$

Показывается единственность решения уравнения в классе ограниченных функций, удовлетворяющих условиям Гельдера.

Существенным недостатком этой модификации является то, что для нахождения приближенного решения нам нужно знать решение уравнения Фредгольма, которое не во всех случаях можно найти в замкнутом виде.

I. В дальнейшем рассмотрим особое интегральное уравнение

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-\alpha(t)}\,d\tau+\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=h(t) \tag{1}$$

при следующих предположениях: 1) функция $\alpha(t)$ гомеоморфно отображает простой замкнутый контур Ляпунова на себя с сохранением или изменением ориентации на L; 2) $a(t)$, $b(t)$, $h(t)$, $\alpha'(t)\in H(\alpha)$ на L, причем $\alpha'(t)\neq 0$; 3) $k(t,\tau)\in L^2_{(L)}$; 4) $a(t)\neq 0$, $D(t)\neq 0$ на L, где

$$D(t)=\begin{vmatrix} a(t) & -\mu b(t)\\ -b[\alpha(t)] & a[\alpha(t)]\end{vmatrix},$$

а $\mu=1$ или $\mu=-1$ смотря по тому сохраняет или изменяет на L ориентацию сдвиг $\alpha(t)$.

Добавляя к (1) уравнение, полученное из (1) заменой t на $\alpha(t)$, и полагая

$$f_1(t)=\varphi(t),\qquad f_2(t)=\varphi[\alpha(t)],$$

получим равносильную систему особых интегральных уравнений, из которых первое — уравнение с ядром Коши, а второе — уравнение со сдвигом

$$\left\{\begin{aligned} & a(t)f_1(t)+\frac{\mu b(t)}{\pi i}\int_L \frac{f_2(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-\frac{\mu b(t)}{\pi i}\int_L k_1(t,\tau)f_2(\tau)\,d\tau+\\ &\qquad\qquad +\int_L k(t,\tau)f_1(\tau)\,d\tau=h(t),\\ & a[\alpha(t)]f_2(t)+\frac{b[\alpha(t)]}{\pi i}\int_L \frac{f_1(\tau)}{\tau-\alpha[\alpha(t)]}\,d\tau+\int_L k[\alpha(t),\tau]f_1(\tau)\,d\tau=h[\alpha(t)],\end{aligned}\right. \tag{2}$$

так как, заменив в $\dfrac{d\tau}{\tau-\alpha(t)}$ τ на $\alpha(\tau)$, получаем

$$\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\,d\tau=\frac{1}{\tau-t}\,d\tau-\left(\frac{1}{\tau-t}-\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}\right)d\tau.$$

В системе (2) согласно [6]

$$k_1(t, \tau) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}$$

является фредгольмовым ядром в том смысле, что в точке $\tau = t$ имеет особенность порядка ниже первого.

Согласно [7] уравнение (1) и система (2) вместе разрешимы или неразрешимы. Функция

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\{f_1(t) + f_2[\alpha(t)]\} \tag{3}$$

будет решением уравнения (1).

Решать систему (2) будем методом осреднения функциональных поправок [8]. Последовательные приближения определим из соотношений

$$\begin{cases} a(t) f_{1n}(t) + \dfrac{\mu b(t)}{\pi i} \displaystyle\int_L \frac{f_{2n}(\tau)}{\tau - t} d\tau - \dfrac{\mu b(t)}{\pi i} \displaystyle\int_L k_1(t, \tau) f_{2n}(\tau) d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int_L k(t, \tau)[f_{1n-1}(\tau) + \alpha_n(\tau)] d\tau = h(t), \\ a[\alpha(t)] f_{2n}(t) + \dfrac{b[\alpha(t)]}{\pi i} \displaystyle\int_L \frac{f_{1n-1}(\tau) + \alpha_n(\tau)}{\tau - \alpha[\alpha(t)]} d\tau + \\ + \displaystyle\int_L k[\alpha(t), \tau][f_{1n-1}(\tau) + \alpha_n(\tau)] d\tau = h[\alpha(t)], \end{cases} \tag{4}$$

где $\alpha_n(t) = \sum_{i=1}^{k} c_{ni}\psi_i(t)$, $\{\psi_i(t)\}$ — произвольная ортонормированная система функций из вещественного пространства $L^2_{(L)}$, $\varphi_0(t) \equiv 0$.

Коэффициенты c_{ni} определяются из условий

$$\int_L \{\alpha_n(t) - \delta_n(t)\} \psi_j(t) dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{5}$$

где

$$\delta_n(t) = f_{1n}(t) - f_{1n-1}(t).$$

Ниже покажем, что для определения коэффициентов c_{ni} получим конечную систему линейных алгебраических уравнений вида

$$c_{nj} + \sum_{i=1}^{k} K_{ij} c_{ni} = -\int_L \int_L K(t, \tau) \delta_{n-1}(\tau) \psi_j(t) d\tau dt - \sum_{i=1}^{k} K_{ij} c_{n-1,i}, \tag{6}$$

где

$$K_{ij} = \int_L \int_L K(t, \tau) \psi_i(\tau) \psi_j(t) d\tau dt,$$

а вид $K(t, \tau)$ дается ниже.

Из системы (6) видим, что коэффициенты для определения функциональных поправок находятся непосредственно через предыдущие приближения.

II. Система (2) согласно [9] нормально разрешима, а из нормальной разрешимости системы (2) следует, что и уравнение (1) нормально разрешимо.

Найдем из второго соотношения (4) функцию $f_{2n}(t)$:

$$f_{2n}(t) = \frac{h[\alpha(t)]}{a[\alpha(t)]} - \frac{b[\alpha(t)]}{a[\alpha(t)]\pi i} \int\limits_L \frac{f_{1n-1}(\tau) + \alpha_n(\tau)}{\tau - \alpha[\alpha(t)]} d\tau -$$

$$- \frac{1}{a[\alpha(t)]} \int\limits_L k[\alpha(t), \tau][f_{1n-1}(\tau) + \alpha_n(\tau)] d\tau. \tag{7}$$

Подставляя в первое соотношение (4) вместо $f_{2n}(t)$ его выражение и меняя затем порядок интегрирования, после несложных преобразований получаем

$$f_{1n}(t) + \int\limits_L K(t, \tau)[f_{1n-1}(\tau) + \alpha_n(\tau)] d\tau = H(t), \tag{8}$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{\mu b(t) a[\alpha(t)]}{D(t)} \left[\frac{1}{(\pi i)^2} \int\limits_L \frac{b[\alpha(\tau_1)]}{a[\alpha(\tau_1)]} \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - \alpha[\alpha(t)])(\tau_1 - t)} - \right.$$

$$- \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{k[\alpha(\tau_1), \tau]}{a[\alpha(\tau_1)]} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - t} - \frac{1}{(\pi i)^2} \int\limits_L \frac{k_1(t, \tau_1) b[\alpha(\tau_1)]}{a[\alpha(\tau_1)]} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \alpha[\alpha(\tau)]} +$$

$$\left. + \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{k[\alpha(\tau_1), \tau] k_1(t, \tau_1)}{a[\alpha(\tau_1)]} d\tau_1 + \frac{k(t, \tau)}{\mu b(t)} \right],$$

$$H(t) = \frac{a[\alpha(t)] h(t)}{D(t)} + \frac{\mu b(t) a[\alpha(t)]}{D(t)\pi i} \int\limits_L \frac{k_1(t, \tau) h[\alpha(\tau)]}{a[\alpha(\tau)]} d\tau -$$

$$- \frac{\mu b(t) a[\alpha(t)]}{D(t)\pi i} \int\limits_L \frac{h[\alpha(\tau)]}{a[\alpha(\tau)]} \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Находя $f_{1n}(t)$ и $f_{2n}(t)$ и подставляя их в формулу (3), мы тем самым найдем n-е приближение к решению исходного уравнения (1).

Используя (8), имеем

$$\delta_n(t) = - \int\limits_L K(t, \tau) \delta_{n-1}(\tau) d\tau - \sum_{\iota=1}^{k} K_\iota(t)(c_{n\iota} - c_{n-1,\iota}), \tag{9}$$

где

$$K_\iota(t) = \int\limits_L K(t, \tau) \psi_\iota(\tau) d\tau \qquad (\iota = 1, 2, \ldots, k).$$

Подставляя в (5) вместо $\delta_n(t)$ выражение (9), получим для определения $c_{n\iota}$ систему (6).

В частном случае, когда сдвиг $\alpha(t)$ удовлетворяет на L еще и условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \tag{10}$$

для отыскания n-го приближения к решению уравнения (1) имеем только одно соотношение

$$f_{1n}(t) + \int\limits_L P(t, \tau)[f_{1n-1}(\tau) + \alpha_n(\tau)] d\tau = H(t), \tag{11}$$

где

$$P(t,\tau)=\frac{\mu b(t)\,a[\alpha(t)]}{D(t)}\left[\frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_L\frac{b[\alpha(\tau_1)]}{a[\alpha(\tau_1)]}\frac{d\tau_1}{(\tau_1-\tau)(\tau_1-t)}-\right.$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{k[\alpha(\tau_1),\tau]}{a[\alpha(\tau_1)]}\frac{d\tau_1}{\tau_1-t}-\frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_L\frac{k_1(t,\tau_1)\,b[\alpha(\tau_1)]}{a[\alpha(\tau_1)]}\frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau}+$$

$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{k[\alpha(\tau_1),\tau]\,k_1(t,\tau_1)}{a[\alpha(\tau_1)]}d\tau_1+\frac{k(t,\tau)}{\mu b(t)}\right],$$

а $H(t)$ имеет такой вид, как и в (8).

$$f_{2n}[\alpha(t)]=f_{1n}(t),$$

ибо

$$f_{2n}[\alpha(t)]=\varphi_n[\alpha(\alpha(t))]=\varphi_n(t)=f_{1n}(t),$$

а поэтому $f_{1n}(t)$ будет n-м приближением к решению уравнения (1).

Если $a(t),\ b(t),\ h(t)\in H(\alpha)$ на L, а $k(t,\tau)\in L^2_{(L)}$, то $K(t,\tau)$ будет принадлежать $L^2_{(L)}$.

Введем обозначения:

$$S_k(t,\tau)=\sum_{\iota=1}^{k}\psi_\iota(t)\,\psi_\iota(\tau),\tag{12}$$

$$M_k(t,\tau)=\int\limits_L K(t,\xi)\,S_k(\xi,\tau)\,d\xi,\qquad \varrho_n=\|\delta_n(t)-\alpha_n(t)\|;$$

$$\overline{\Omega}_k(t)=\left\{\int\limits_L|\Omega_k(t,\tau)|^2\,d\tau\right\}^{1/2},$$

где $\Omega_k(t,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\Omega_k(t,\tau)=K(t,\tau)-M_k(t,\tau)+\int\limits_L M_k(t,\xi)\,\Omega_k(\xi,\tau)\,d\xi;\tag{13}$$

$$\overline{L}_k=\|L_k(t,\tau)\|,\tag{14}$$

где

$$L_k(t,\tau)=\Omega_k(t,\tau)-\int\limits_L S_k(t,\xi)\,\Omega_k(\xi,\tau)\,d\tau.$$

У нас $K(t,\tau)\in L^2_{(L)}$, $H(t)\in L^2_{(L)}$, то из теоремы 9 [8] следует, что всегда можно выбрать k таким, чтобы неравенство $\overline{L}_k<1$ выполнялось.

Теорема. *Если $a(t)$, $b(t)$, $\alpha'(t)\in H(\alpha)$; $a(t)\neq 0$, $D(t)\neq 0$ на L, а $k(t,\tau)\in L^2_{(L)}$ и существует единственное решение уравнения* (1), *а k выбрано так, что $\overline{L}_k<1$, то последовательности $\{f_{1n}(t)\}$ и $\{f_{2n}(t)\}$ сходятся в среднем к решению системы*

$$\left\{\begin{aligned}&f_1(t)+\int\limits_L K(t,\tau)\,f_1(\tau)\,d\tau=H(t),\\&a[\alpha(t)]\,f_2(t)+\frac{b[\alpha(t)]}{\pi i}\int\limits_L\frac{f_1(\tau)}{\tau-\alpha[\alpha(t)]}d\tau+\int\limits_L k[\alpha(t),\tau]\,f_1(\tau)\,d\tau=h[\alpha(t)],\end{aligned}\right.\tag{15}$$

которая эквивалентна уравнению (1).

Рассмотрим частный случай, когда $\alpha(t)$ удовлетворяет условию Карлемана.

Пусть $\Delta_n(t) = f_{1n}(t) - f_1(t)$, где $f_{1n}(t)$ — приближенное решение уравнения

$$f_1(t) + \int_L P(t, \tau) f_1(\tau) d\tau = H(t), \tag{16}$$

а $f_1(t)$ — точное.

Тогда можно получить следующую оценку погрешности:

$$|\Delta_n(t)| \leqslant \frac{\overline{\Omega}'_k}{1 - \overline{L}'_k} \varrho_n, \tag{17}$$

где $\overline{\Omega}'_k$ и $\overline{L}'_k$ получаются из $\overline{\Omega}_k$ и $\overline{L}_k$ заменой $K(t, \tau)$ на $P(t, \tau)$.

Примечание. Оценка погрешности (17) будет справедлива также и в случае, когда $\alpha(t)$ удовлетворяет обобщенному условию Карлемана

$$\alpha_m(t) = t, \tag{18}$$

где $\alpha_m(t) = \alpha[\alpha_{m-1}(t)]$ обозначает m-ю итерацию функции $\alpha(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Трикоми, О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, Гостехиздат, М., 1947.
2. С. Г. Михлин, Об интегральном уравнении F. Tricomi, ДАН СССР, 59, № 6, 1948.
3. А. В. Бицадзе, К проблеме уравнений смешанного типа, Труды математического института АН СССР, XLI, 1953.
4. Ф. Д. Гахов, А. И. Чибрикова, О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Матем. сб., 35 (77) : 3, 1954.
5. Ю. В. Девингталь, Применение метода последовательных приближений к одному виду сингулярных интегральных уравнений в связи с решением обобщенной задачи для уравнения М. А. Лаврентьева, УМН, т. XIV, вып. 1(85), 1959.
6. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, М., 1963.
7. Г. С. Литвинчук, Регуляризация одного класса особых интегральных уравнений со сдвигом, ДАН БССР, т. X, № 8, 1966.
8. А. Ю. Лучка, Теория и применение метода осреднения функциональных поправок, Изд-во АН УССР, К., 1963.
9. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, гл. VI, Физматгиз, М., 1962.

Поступила 3.V 1967 г.
Институт математики АН УССР