УДК 519.34

О сходимости и устойчивости метода Ритца

А. Ю. Лучка

В данной работе устанавливается практически проверяемое условие сходимости и устойчивости метода Ритца применительно к операторным уравнениям вида

$$Ax = f, \tag{1}$$

где A — линейный оператор, действующий в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H, область определения $D(A)$ которого плотна в H, x, f — искомый и данный элементы пространства H.

1. Пусть A — положительно определенный оператор, т. е.

$$(Ax, x) \geqslant \gamma^2 \| x \|^2, \qquad x \in D(A). \tag{2}$$

Тогда, как известно, метод Ритца состоит в том, что приближенное решение уравнения (1) ищем в виде

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \varphi_k, \tag{3}$$

где $\{\varphi_k\}$ — некоторая последовательность элементов пространства H, а коэффициенты $c_1^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}$ определяем из условия минимума функционала

$$F(x_n) = (Ax_n, x_n) - (x_n, f) - (f, x_n). \tag{4}$$

Если подставить (3) в (4), то после некоторых преобразований, учитывая то, что

$$\frac{\partial F(x_n)}{\partial \bar{c}_k^{(n)}} = 0,$$

получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} (A\varphi_k, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

из которой определяем коэффициенты $c_1^{(n)}, \ldots, c_n^{(n)}$.

Сходимость и устойчивость метода Ритца наиболее полно исследована в работах [1 — 4]. В этих работах установлено, что если A — положительно определенный оператор и система $\{\varphi_k\}$ — координатная, т. е. удовлетворяет таким трем условиям: 1) $\varphi_k \in H_A$, $k = 1, 2, 3, \ldots$; 2) при любом n элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы; 3) система $\{\varphi_k\}$ полна в H_A, то последовательность $\{x_n\}$, построенная согласно методу Ритца, сходится по норме в H к решению уравнения (1). Напомним, что H_A — гильбертово пространство, которое получается при замыкании области $D(A)$ в метрике $[u, v]_A = (Au, v)$, $u, v \in D(A)$.

Применение метода Ритца требует предварительного выбора системы $\{\varphi_k\}$, полной в H_A. Этот выбор связан с некоторыми трудностями, так как полнота системы $\{\varphi_k\}$ в H_A существенно зависит от конкретного вида оператора A. Ниже устанавливается сходимость метода Ритца в пространстве H, для которой непосредственно не требуется полнота системы $\{\varphi_k\}$ в H_A, так как она будет следовать из условий, налагаемых на оператор A и систему $\{\varphi_k\}$.

Лемма. *Если A — положительно определенный оператор и система $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in D(A)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, ортонормирована и полна в пространстве H, то эта же система $\{\varphi_k\}$ полна в пространстве H_A.*

Доказательство. Предположим, что в пространстве H_A существует элемент z, отличный от нулевого, для которого справедливы соотношения

$$[z, \varphi_k]_A = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

В силу симметрии скалярного произведения и определения пространства H_A соотношения (6) можно представить в виде

$$[z, \varphi_k]_A = [\varphi_k, z]_A = (A\varphi_k, z) = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Поскольку каждый элемент пространства H_A является элементом пространства H и $\varphi_k \in D(A)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, то элементы z и $A\varphi_k$ принадлежат пространству H. По условию леммы система $\{\varphi_k\}$ ортонормирована и полна в H, следовательно, на основании обобщенного равенства Парсеваля соотношения (7) можно представить в виде

$$\sum_{s=1}^{\infty} (A\varphi_k, \varphi_s)(\varphi_s, z) = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

Система $\{\varphi_k\}$ сильно минимальна в пространстве H_A. Это вытекает из условий, налагаемых на оператор A и систему $\{\varphi_k\}$, и результатов работы [4] (следствие 4.2). Следовательно, нуль не является собственным значением матрицы $\| (A\varphi_k, \varphi_s) \|_{k,s=1}^{\infty}$. Из сказанного вытекает, что система (8) имеет только тривиальное решение, т. е. $(z, \varphi_s) = 0$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, отсюда в силу полноты системы $\{\varphi_s\}$ в H следует $z = \theta$. Таким образом, в пространстве H_A не существует элемента, отличного от нулевого, ортогонального всем элементам φ_k, следовательно, система $\{\varphi_k\}$ полна в пространстве H_A.

Замечание 1. Если A — положительно определенный оператор, то лемма справедлива и в том случае, когда система $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in D(A)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, линейно независима и полна в H.

Для установления этого утверждения достаточно ортонормировать систему $\{\varphi_k\}$ и повторить рассуждения, приведенные при доказательстве леммы.

Замечание 2. Если A — самосопряженный положительно определенный оператор и система $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in H_A$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, линейно независима и полна в пространстве H, то можно только утверждать, что эта же система $\{\varphi_k\}$ полна в энергетическом пространстве H_B, где B — квадратный корень оператора A, т. е. $B = A^{\frac{1}{2}}$.

Из вышесказанного о сходимости метода Ритца на основании леммы и замечания 1 непосредственно вытекает такое утверждение.

Теорема 1. *Если A — положительно определенный оператор и система $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in D(A)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, линейно независима и полна в пространстве H, то*

$$\| x_n - x^* \| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

где x_n — приближенное решение, построенное согласно методу Ритца, и x^* — точное решение уравнения (1).

Замечание 3. Иногда полезно в качестве координатной системы в методе Ритца брать систему $\{\varphi_k\}$, определяемую из уравнений

$$G\varphi_k = \psi_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

где $\{\psi_k\}$ — некоторая линейно независимая и полная в H система и G — линейный оператор, для которого существует обратный оператор G^{-1}, определенный на всем H, и $D(G) = D(A)$. В этом случае система $\{\varphi_k\}$ оказывается линейно независимой и полной в H, причем $\varphi_k \in D(A)$. Следовательно, в силу теоремы 1 имеем, что последовательность $\{x_n\}$, построенная согласно формулам (3) и (5), сходится в H к решению x^* уравнения (1).

Если же приближенное решение y_n уравнения (1) определять из уравнения

$$Gy_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} \psi_k,$$

в котором параметры $\beta_k^{(n)}$ определяются из условия минимума функционала

$F(y_n)$ (4), то оказывается, что $y_n = x_n$, если при построении x_n в качестве координатной системы взята система $\{\varphi_k\}$, определяемая из уравнений (9).

2. В работе [4], § 10 доказана теорема, утверждающая, что для того чтобы приближенные решения, построенные по методу Ритца, были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы координатная система $\{\varphi_k\}$ была сильно минимальной в пространстве H_A. Напомним, что в этой теореме под координатной системой понимается система $\{\varphi_k\}$, удовлетворяющая сформулированным в пункте 1 условиям, одним из которых является требование полноты системы $\{\varphi_k\}$ в H_A.

Если A — положительно определенный оператор и система $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in H_A$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, сильно минимальна в H, то в силу следствия 2, § 4 работы [4] эта же система будет сильно минимальной и в H_A. Отсюда и из теоремы 1 вытекает такое утверждение.

Теорема 2. *Если A — положительно определенный оператор и система $\{\varphi_k\}$, $\varphi_k \in D(A)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, сильно минимальна и полна в пространстве H, то приближенные решения x_n, построенные по методу Ритца, устойчивы и $\| x_n - x^* \| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Замечание 4. Если система $\{\varphi_k\}$ линейно независима и полна в H, но не принадлежит области $D(A)$, а только принадлежит пространству H_A, то теорема 1, вообще говоря, не имеет места. Например, рассмотрим в пространстве $L_2[0, \pi]$ краевую задачу

$$Ax \equiv -x'' = 2, \qquad x(0) = x'(\pi) = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет единственное решение $x^*(t) = 2\pi t - t^2$. Для данного примера пространство H_A состоит из функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^\pi x'^2 dt < \infty, \qquad x(0) = 0.$$

Пусть $\varphi_k(t) = \sin kt$, тогда, очевидно, система $\{\sin kt\}$ — линейно независимая и полная в $L_2[0, \pi]$, а также $\varphi_k(t) \in H_A$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Приближенное решение уравнения (10), построенное согласно формулам (3), (5), имеет вид

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{\pi k^3} [1 - (-1)^k] \sin kt,$$

причем легко можно установить, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\pi \left\{ \pi t - t^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{\pi k^3} [1 - (-1)^k] \sin kt \right\}^2 dt = 0,$$

т. е. $x_\infty(t) = \pi t - t^2$ и $x^*(t) - x_\infty(t) = \pi t$.

Замечание 5. Полученные выше результаты без существенных ограничений переносятся на случай, когда A является K-положительно определенным оператором [5]. Некоторые результаты переносятся и на нелинейные операторные уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. С Г. Михлин, Вариационные методы решения задач математической физики, УМН, т. V, вып. 6 (40), 1950.
2. С. Г. Михлин, Проблемы минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
3. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, М., 1957.
4. С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, изд-во «Наука», М., 1966.
5. W. V. Petryshyn, Direct and iterative methods for the solution of linear operator eguations in Hilbert spase, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 105, 1962.

Поступила 9.I 1968 г.
Институт математики АН УССР