УДК 517.9

# О центре грубой динамической системы

А. Н. Шарковский

Пусть $M$ — гладкое компактное многообразие. Всякое (гладкое) векторное поле на $M$ (т. е. система обыкновенных дифференциальных уравнений на $M$) порождает на $M$ динамическую систему (траектории которой — интегральные кривые системы уравнений)*.

Рассмотрим пространство $D_M$ векторных полей на $M$ класса $C^1$, снабженное $C^1$-топологией (векторные поля $C^1$ близки, если поточечно близки сами векторные поля и их первые производные).

Пусть $X \in D_M$ и точка $p \in M$ является неблуждающей точкой динамической системы $\varphi(t, x)$, порожденной векторным полем $X$ (т. е. для любой окрестности $U$ точки $p$ и любого $t_0 > 0$ существует точка $q \in U$ и такое $t > t_0$, что $\varphi(t, q) \in U$). Тогда сколь угодно близко к $X$ в пространстве $D_M$ существует векторное поле $X'$, порождающее динамическую систему, для которой точка $p$ является периодической, т. е. принадлежит замкнутой траектории.

Это утверждение составляет содержание так называемой леммы о замыкании и было недавно доказано Ч. Пью [1]. Ниже идет речь о некоторых почти очевидных следствиях этой леммы.

Как известно, две динамические системы, порождаемые векторными полями $X_1$ и $X_2$ соответственно, называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h\colon M \to M$, переводящий траектории одной динамической системы в траектории другой, причем направление движения по траекториям сохраняется. Если при этом существует гомеоморфизм $h$, сдвигающий каждую точку из $M$ не более, чем на $\varepsilon$, то динамические системы называются $\varepsilon$-эквивалентными. Динамическая система, порожденная векторным полем $X \in D_M$, называется грубой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любая динамическая система, порожденная векторным полем $X' \in D_M$, $\varepsilon$-эквивалентна исходной системе, коль скоро расстояние в $D_M$ $d(X, X') < \delta$.

В дальнейшем динамическую систему, порожденную векторным полем $X \in D_M$, будем называть $X$-системой.

Из леммы о замыкании немедленно вытекает: *всякая неблуждающая точка грубой динамической системы является предельной для периодических точек*.

В самом деле, пусть $p$ — неблуждающая точка $X$-системы и $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Докажем, что в $\varepsilon$-окрестности точки $p$ имеется хотя бы одна периодическая точка. Если $X$ — система грубая, найдется $\delta > 0$ такое, что всякая $\widetilde{X}$-система $\varepsilon$-эквивалентна $X$-системе, если $d(\widetilde{X}, X) < \delta$. Согласно

* Аналогично, всякий диффеоморфизм $M \to M$ порождает на $M$ динамическую систему с дискретным временем. Все, о чем далее идет речь, остается в силе и для этого случая.

лемме найдется $\widetilde{X}'$-система такая, что $d(\widetilde{X}', X) < \delta$ и $p$ является периодической точкой $\widetilde{X}'$-системы. Пусть $h$ — гомеоморфизм $M \to M$, переводящий траектории $\widetilde{X}'$-системы в траектории $X$-системы, причем расстояние между $x$ и $hx < \varepsilon$ для любой точки $x \in M$. Точка $q = h^{-1}p$ лежит в $\varepsilon$-окрестности точки $p$ и является периодической точкой $X$-системы.

В общей теории динамических систем помимо множества неблуждающих точек $W$ важное место занимают множество центральных траекторий (или центр) $C$, минимальный центр притяжения $P$*. Вообще говоря, $W \supseteq C \supseteq P$; можно указать такие динамические системы, когда все эти множества будут различны.

Минимальный центр притяжения определяется как наименьшее замкнутое множество, любая окрестность которого обладает следующим свойством: всякая траектория почти все время находится в этой окрестности (если, например, $U$ — окрестность множества $P$ и $\tau(x, U, n)$ — мера множества тех значений $t, |t| < n$, для которых $\varphi(t, x) \in U$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tau(x, U, n)}{n} = 1$ для любой точки $x \in M$). Поэтому минимальный центр притяжения $P$ содержит все циклы и, таким образом, в грубой динамической системе $W \subseteq P$. Это означает, что *в грубой динамической системе множества $W$, $C$, $P$ совпадают*.

Дж. Д. Биркгоф и А. Г. Майер предложили три алгоритма построения центра $C$ произвольной динамической системы (по этому поводу см. [3]), ставящие в соответствие динамической системе топологический инвариант — порядковое число центра: $r_A$ (первый алгоритм Биркгофа), $r_B$ (второй алгоритм Биркгофа), $r_C$ (алгоритм Майера). При этом $r_A \geqslant r_B \geqslant r_C$. Как показал Майер, для любого конечного или счетного порядкового числа $\varrho$ можно построить динамическую систему, у которой $r_A$ ($r_B$ или $r_C$) равно $\varrho$**.

Любой точке из оболочки динамической системы (дополнения к центру) каждый из отмеченных алгоритмов ставит в соответствие определенное порядковое число $< r_A$ ($r_B$, $r_C$), также являющееся топологическим инвариантом. Если $W = C$, то согласно первому алгоритму Биркгофа $r_A = 1$. Это означает, что для грубой динамической системы $r_A = r_B = r_C = 1$; порядковые числа центра, а следовательно, и каждой точки оболочки равны 1.

Наиболее важным фактом относительно множества $W$ неблуждающих точек является следующая теорема Дж. Д. Биркгофа [5]: если $U_W$ — произвольная окрестность множества $W$, существует $N > 0$, зависящее только от $U_W$ и такое, что время пребывания любой траектории вне и $U$ не превосходит $N$.

Таким образом, грубая динамическая система обладает следующим свойством: если всякая траектория динамической системы почти все время находится во множестве $V$ $\left(\text{т. е. } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\tau(x, V, n)}{n} = 1 \text{ для всех } x \in M\right)$, то для любого открытого множества $U \supset \bar{V}$ ($\bar{V}$ — замыкание $V$) существует такое $N > 0$, что время пребывания любой траектории вне $U$ не превосходит $N$ (т. е. $\tau(x, M \setminus U, n) < N$ для всех $x \in M$ и $n > 0$). Грубо говоря, это означает: *если $\tau(x, M \setminus U, n) = o(n)$ для всех $x \in M$*, то $\tau(x, M \setminus U, n) < N$ *для всех $n$ и $x \in M$*.

Относительно множества неблуждающих точек грубой динамической системы (множества $W$, а следовательно, и множеств $C$, $P$), по-видимому, имеет место такой точный результат.

* Соответствующие определения можно найти, например, в [2].

** Л. П. Шильников [4] доказал, что это остается справедливым даже для динамических систем в $R^3$ класса $C^\infty$.

*В грубой динамической системе множество неблуждающих точек представляет собой объединение конечного числа непересекающихся квазиминимальных множеств.*

Квазиминимальным, как известно, называется множество, являющееся замыканием траектории, устойчивой по Пуассону.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Ch. C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem, American J. Math., vol. 89, N 4, 1967.
2. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949, гл. V.
3. А. Г. Майер, Центральные траектории и проблема Биркгофа, Матем. сб., т. 26 (68) 1950.
4. Л. П. Шильников, О некоторых результатах, связанных с задачей Пуанкаре — Биркгофа, Аннотации докл. 3-го Всесоюзного съезда по теорет. и прикл. мех., 1968, 323.
5. Дж. Д. Биркгоф, Динамические системы, 1941, гл. VII.



Поступила 13.IV 1968 г.


Институт математики АН УССР


## К СВЕДЕНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ

В № 4, т. 20 Украинского математического журнала допущены следующие опечатки

| Страница | Строка | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 478 | 8-я строка сверху | $H_i \in \overline{\mathfrak{S}}_1$ | $H_i \overline{\in} \mathfrak{S}_1$ |
| 479 | 18-я строка снизу | $\mathfrak{A}_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}^{n^k}$ | $\mathfrak{A}_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}^{n^k}$ |
| 483 | 14-я строка сверху | $L(\lambda + L(\lambda)$ | $L(\lambda + L(\lambda))$ |
| 522 | 2-я строка » | . . . в пространстве | . . . в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ |
| 549 | 8-я строка » | $f(t), v(t), v'(t))$ | $f(t, v(t), v'(t))$ |