УДК 517.521.8

Суммирование разбавленных рядов (отрицательные результаты)

В. Ф. Власенко

Пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

— числовой ряд с комплексными членами, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n = 0, 1, \ldots)$ — его частные суммы, $A = \| a_{nk} \|$ — дискретная матрица с комплексными элементами, $A = \| a_k(x) \|$ — полунепрерывная матрица ($\{a_k(x)\}$ — последовательность комплекснозначных функций, определенных в промежутке $[0; x_0)$, где x_0 — конечное число или $+\infty$). Говорят, что ряд (1) суммируется при помощи матрицы A (A-суммируется) к числу $S \neq \infty$, если ряды $t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} S_k$ $\left(t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k \right)$ сходятся для всех $n \geqslant n_0 \geqslant 0$ (для всех $0 \leqslant x' < x < x_0$) и $\lim_{n\to\infty} t_n = S$ $(\lim_{x\to x_0} t(x) = S)$.

Если между членами ряда (1) произвольно вставить нули, т. е. «разбавить» ряд (1) нулями, то получим новый ряд

$$a_0 + 0 + \ldots + 0 + a_1 + 0 + \ldots + 0 + a_n + 0 + \ldots + 0 + a_{n+1} + \\ + 0 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n', \tag{1'}$$

который называют разбавленным рядом.

В работе [1] показано, что для метода суммирования Абеля—Пуассона ($a_k(x) = (1 - x) x^k$, $x_0 = 1$) существует ряд с ограниченными частными суммами такой, что ни при каком разбавлении его нулями нельзя получить разбавленного ряда, суммируемого методом Абеля—Пуассона к числу, отличному от всех частичных пределов последовательности сумм этого ряда.

Целью настоящей заметки является доказательство следующего предложения.

Теорема. *Для каждой полунепрерывной матрицы $A = \| a_k(x) \|$, удовлетворяющей условиям:*

а) $\sum_{k=0}^{\infty} | a_k(x) | = H(x) < \infty$ *для всех* $x \in [0; x_0)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0} a_k(x) = 0$ *для каждого фиксированного* $k = 0, 1, \ldots;$

в) $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x) = 1,$

существует ряд, последовательность частных сумм которого имеет две (и только две) предельные точки 0 *и* 1, *такой, что ни при каком разбавлении его нулями нельзя получить разбавленного ряда, А-суммируемого к числу, отличному от* 0 *и* 1.

Доказательство. Доказательство проведем для случая $x_0 = +\infty$. Фиксируем положительную последовательность $\{\varepsilon_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{2}$$

Берем произвольно натуральное число k_1 и по числу ε_1 находим число $x_1 > 0$ такое, что

$$\sum_{k=0}^{k_1} |a_k(x)| < \varepsilon_1$$

для всех $x \geqslant x_1$. По числам x_1 и ε_2 находим натуральное число $k_2 > k_1 + 1$ такое, что

$$\sum_{k=k_2}^{\infty} |a_k(x_1)| < \varepsilon_2.$$

Существование таких чисел x_1 и k_2 вытекает из условий б) и а) соответственно.

Если числа x_{i-1} и k_i $(i \geqslant 2)$ определены, то число $x_i > x_{i-1} + 1$ выберем так, чтобы

$$\sum_{k=0}^{k_i} |a_k(x)| < \varepsilon_i \tag{3}$$

для всех $x \geqslant x_i$. Затем находим натуральное число $k_{i+1} > k_i + 1$ так, чтобы

$$\sum_{k=k_{i+1}}^{\infty} |a_k(x_i)| < \varepsilon_{i+1}. \tag{4}$$

Из (2) — (4) и в) имеем:

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}-1} a_k(x_i) = 1. \tag{5}$$

Рассмотрим ряд (1) с частными суммами

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{если } p_m \leqslant n < q_m, \ p_1 = 0, \\ 1, & \text{если } q_m \leqslant n < p_{m+1}, \end{cases}$$

где p_m, q_m — натуральные числа, причем

$$q_m - p_m > k_{m^2}, \ p_{m+1} - q_m > k_{m^2} \ (m = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Покажем, что ни при каком разбавлении этого ряда нулями нельзя получить разбавленный ряд, A-суммируемый к числу B, отличному от нуля и единицы. Предположим противное и пусть (1′) — тот разбавленный ряд, который A-суммируется к числу B:

$$t'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S'_k \to B \ (x \to \infty), \tag{7}$$

где $S'_n \ (n = 0, 1, \ldots)$ — частные суммы ряда (1′):

$$S'_n = \begin{cases} 0, & \text{если } p'_m \leqslant n < q'_m, \ p'_1 = 0, \\ 1, & \text{если } q'_m \leqslant n < p'_{m+1}, \ m = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

В силу (6) и разбавления ряда (1) нулями

$$q'_m - p'_m \geqslant q_m - p_m > k_{m^2}, \ p'_{m+1} - q'_m \geqslant p_{m+1} - q_m > k_{m^2} \ (m = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Из (7) и (5) следует:

$$\lim_{i\to\infty} t'(x_i) = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_i) S'_k = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}-1} a_k(x_i) S'_k = B. \tag{9}$$

Так как $B \neq 0$ и $B \neq 1$, то из (9) и (5) следует, что ни один из отрезков $[p'_m; \ q'_m - 1]$ и $[q'_m; \ p'_{m+1} - 1]$ для $m \geqslant m_0$ не покрывает полностью ни одного из отрезков $[k_i + 1; \ k_{i+1} - 1]$ для $i \geqslant i_0$. Поэтому, начиная с некоторых $i = i_0$ и $m = m_0$, каждый из отрезков $[k_i + 1; \ k_{i+2} - 1]$ должен содержать, по крайней мере, один из отрезков $[p'_m; \ q'_m - 1]$ или $[q'_m; \ p'_{m+1} - 1]$. Пусть, например, $[p'_{m_0}; \ q'_{m_0} - 1] \subset [k_{i_0} + 1; \ k_{i_0+2} - 1]$, причем отрезок $[p'_{m_0}; \ q'_{m_0} - 1]$ является крайним справа, содержащимся в $[k_{i_0} + 1; \ k_{i_0+2} - 1]$; $[q'_{m_0+s_1}; \ p'_{m_0+s_1+1} - 1] \subset [k_{i_0+1} + 1; \ k_{i_0+3} - 1]$, причем отрезок $[q'_{m_0+s_1}; \ p'_{m_0+s_1+1} - 1]$ является крайним справа, содержащимся в $[k_{i_0+1} + 1; \ k_{i_0+3} - 1]$. Очевидно, $s_1 \geqslant 1$.

Обозначим через $[a_{m_0+s_j}; \ b_{m_0+s_j}]$ тот из крайних справа отрезков $[p'_{m_0+s_j}; \ q'_{m_0+s_j} - 1]$ или $[q'_{m_0+s_j}; \ p'_{m_0+s_j+1} - 1]$, который расположен на отрезке $[k_{i_0+j} + 1; \ k_{i_0+j+2} - 1]$. Нетрудно видеть, что $s_j \geqslant j \ (j = 1, 2, \ldots)$, так как некоторые отрезки $[k_{i_0+j} + 1; \ k_{i_0+j+2} - 1]$ могут содержать несколько отрезков $[p'_m; \ q'_m - 1]$ и $[q'_m; \ p'_{m+1} - 1]$ $(m > m_0)$.

Из характера расположения отрезков $[a_{m_0+s_j}; \ b_{m_0+s_j}]$ и $[k_{i_0+j} + 1; \ k_{i_0+j+2} - 1]$, неравенств (8) и неравенств $s_j \geqslant j \ (j = 1, 2, \ldots)$ в силу возрастания чисел k_i с ростом i следует:

$$k_{i_0+j+2} - k_{i_0+j} > b_{m_0+s_j} - a_{m_0+s_j} > k_{(m_0+s_j)^2} \geqslant k_{(m_0+j)^2}, \tag{10}$$

Так как i_0 и m_0 постоянны, то для достаточно больших j получим:

$$i_0 + j < i_0 + j + 2 < (m_0 + j)^2, \tag{11}$$

так что для этих j

$$k_{i_0+j} < k_{i_0+j+2} < k_{(m_0+j)^2}. \tag{12}$$

Неравенства (10) и (12) для j, удовлетворяющих (11), противоречивы.

Теорема доказана.

При $H(x) \leqslant M \ (M > 0)$ для всех $x \in [0; \ x_0)$ из нее получаем соответствующий результат для регулярных матриц. Аналогичная теорема для дискретных матриц $A = \| a_{nk} \|$ получается из доказанной теоремы, если положить x целым, равным $n = 0, 1, \ldots,$ и обозначить $a_k(n) = a_{nk}$.

В заключение выражаю благодарность Н. А. Давыдову за помощь и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Мельник, Суммирование разбавленных рядов методом Абеля — Пуассона, УМЖ, т. 17, № 6, 1965.

Поступила 10.I 1967 г.,
после переработки — 6.IV 1968 г.
Киевский пединститут