УДК 517.947:517.534

Об особых точках комплексного потенциала формирующего поля

Э. П. Гранкин

Обратная задача корпускулярной оптики для плоско-параллельных полей сводится к нахождению почти всюду аналитической функции $f(\zeta)$ внутри или вне единичного круга при граничном условии

$$f'(\sigma)\cdot\sigma+\overline{f'(\sigma)}\cdot\bar{\sigma}=\left[\frac{\omega''(\sigma)\cdot\sigma}{\omega'(\sigma)}+2+\frac{\overline{\omega''(\sigma)}\,\bar{\sigma}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right][f(\sigma)+\overline{f(\sigma)}], \tag{1}$$

где $\omega(\zeta)$ — функция, отображающая контур единичной окружности на контур L, составленный либо двумя траекториями пучка, либо одной замкнутой траекторией, для которых ищется формирующее поле.

При этом очень важным и интересным является вопрос об отыскании всех видов источников, создающих поле. Известно, что источник нарушает голоморфность комплексного потенциала в точках расположения этого источника, и комплексный потенциал имеет в таких точках особенности. Попытаемся определить характер этих особенностей.

Пусть функция $\omega(\zeta)$ однолистно отображает внутренность единичного круга на внутренность односвязной области, ограниченной контуром L. Тогда можем заключить, что функция $\dfrac{\omega''(\sigma)\cdot\sigma}{\omega'(\sigma)}$ есть граничное значение функции $\dfrac{\omega''(\zeta)\,\zeta}{\omega'(\zeta)}$, голоморфной внутри единичного круга и имеющей вне круга полюсы не более первого порядка в точках ветвления отображающей функции.

Предположим, что отображающая функция имеет n точек ветвления, т. е. отображение осуществляется полиномом $(n+1)$-й степени. Обозначим эти точки через $\dfrac{1}{\bar{a}_1}, \dfrac{1}{\bar{a}_2}, \ldots, \dfrac{1}{\bar{a}_n}$ $(|a_k|<1)$. Тогда функция $\dfrac{\omega''(\zeta)\,\zeta}{\omega'(\zeta)}$ представима в виде

$$\frac{\omega''(\zeta)\,\zeta}{\omega'(\zeta)}=\bar{B}_0+\frac{\bar{B}_1}{\zeta-\dfrac{1}{\bar{a}_1}}+\ldots+\frac{\bar{B}_n}{\zeta-\dfrac{1}{\bar{a}_n}}. \tag{2}$$

Аналогично получаем

$$\frac{\bar{\omega}''\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}{\zeta\bar{\omega}'\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}=B_0+\frac{B_1a_1\zeta}{a_1-\zeta}+\ldots+\frac{B_na_n\zeta}{a_n-\zeta}. \tag{3}$$

Предположим, что комплексный потенциал $f(\zeta)$ имеет внутри круга полюс m-го порядка в некоторой точке a. Тогда

$$f(\zeta) = \frac{A(\zeta)}{(\zeta - a)^m} + \tau(\zeta), \tag{4}$$

где $A(\zeta)$ — полином степени $m-1$, причем $A(a) \neq 0$, $\tau(\zeta)$ — функция, голоморфная внутри единичного круга.

Подставим разложения (2) — (4) в граничное условие (1), умножим на ядро Коши и проинтегрируем по γ. В результате получим

$$\tau(\zeta)\,\zeta + \frac{\bar{A}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\zeta^{m-1}}{(1-\bar{a}\zeta)^m} - \frac{\bar{A}\left(\frac{1}{\zeta}\right)m\zeta^m}{(1-a\zeta)^{m+1}} =$$

$$= 2\tau(\zeta) + 2\frac{\bar{A}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\zeta^m}{(1-\bar{a}\zeta)^m} + 2\operatorname{Re}B_0\,\tau(\zeta) +$$

$$+ 2\operatorname{Re}B_0\frac{\bar{A}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\zeta^m}{(1-\bar{a}\zeta)^m} + \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{\zeta^m}{(1-\bar{a}\zeta)^m} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{G}_k}{\bar{a}_k\zeta - 1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{\bar{a}_k\zeta - 1} + \psi(\zeta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{C}_k}{\bar{a}_k\zeta - 1} + \varphi(\zeta) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{E}_k}{\bar{a}_k\zeta - 1} + \frac{\bar{D}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\zeta^m}{(1-\bar{a}\zeta)^m}, \tag{5}$$

где C_k, $D(\zeta)$, E_k, $F(\zeta)$, G_k, H_k, $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ входят в разложения

$$\tau(\sigma)\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k a_k\sigma}{a_k - \sigma} = \sum_{k=1}^{n}\frac{C_k\sigma}{a_k - \sigma} + \varphi(\sigma),$$

$$\tau(\sigma)\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{B}_k\bar{a}_k}{\bar{a}_k\sigma - 1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k}{a_k\sigma - 1} + \psi(\sigma),$$

$$\frac{A(\sigma)}{(\sigma - a)^m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{B}_k\bar{a}_k}{\bar{a}_k\sigma - 1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{E}_k}{\bar{a}_k\sigma - 1} + \frac{D(\sigma)}{(\sigma - a)^m}, \tag{6}$$

$$\frac{\overline{A(\sigma)}\,\sigma^m}{(1-\bar{a}\sigma)^m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{B}_k\bar{a}_k}{\bar{a}_k\sigma - 1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{G_k}{\bar{a}_k\sigma - 1} + \frac{\overline{F(\sigma)}\,\sigma^m}{(1-\bar{a}\sigma)^m}.$$

Пусть a не совпадает ни с одной из точек a_k. Тогда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\frac{1}{\bar{a}_k\zeta - 1}$ и $\frac{1}{1-\bar{a}\zeta}$, получим из сравнения $(n+1)$-й степени $\frac{1}{1-\bar{a}\zeta}$, что $A(\zeta) \equiv 0$, т. е. что полюс в точке внутри единичного круга, отличной от точки, обратно сопряженной точке ветвления, отсутствует. Таким образом, если функция имеет n указанных выше точек ветвления, то комплексный потенциал следует искать в виде

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k(\zeta)}{(\zeta - a_k)^{m_k}} + \tau(\zeta), \tag{7}$$

где $\tau(\zeta)$ — функция, голоморфная всюду внутри единичного круга, $A_k(\zeta)$ — полиномы степени не более $m_k - 1$.

В том случае, когда функция $\omega(\zeta)$ однолистно отображает внешность единичного круга на внешность исходной области, мы приходим к тому же самому результату: если функция имеет внутри единичного круга точки ветвления $\frac{1}{\bar{a}_1}, \frac{1}{\bar{a}_2}, \ldots, \frac{1}{\bar{a}_n}$, то комплексный потенциал может иметь полюсы соответственно в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$, расположенных вне круга.

Результат всего сказанного выше можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если функция $\omega(\zeta)$ однолистно отображает внутренность (внешность) единичного круга на внутренность (внешность) области, ограниченной контуром L, составленным либо двумя траекториями формируемого пучка, либо одной замкнутой траекторией, то комплексный потенциал может иметь полюсы в точках внутри (вне) единичного круга, обратно сопряженных точкам ветвления отображающей функции.*

Это общее положение подтверждается еще и следующим. Комплексный потенциал, удовлетворяющий граничному условию (1), имеет вид

$$f(\zeta) = c\, \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \tag{8}$$

где $c = a + ib$ — произвольная постоянная.

Из (8) следует, что комплексный потенциал может иметь полюсы в тех точках, в которых функция $\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ обращается в нуль, т. е. в точках, обратно сопряженных точкам ветвления отображающей функции.

Исследуем теперь вопрос о местах расположения логарифмических особенностей комплексного потенциала.

Пусть по-прежнему круг единичного радиуса отображается на исходную односвязную область функцией $\omega(\zeta)$. Пусть эта функция имеет n точек ветвления, расположенных вне круга. Обозначим их как и раньше через $\frac{1}{\bar{a}_1}, \frac{1}{\bar{a}_2}, \ldots, \frac{1}{\bar{a}_n}$ $(|a_k| < 1)$. Тогда функция $\frac{\omega''(\zeta)\,\zeta}{\omega'(\zeta)}$ имеет разложение (2), а функция $\frac{\overline{\omega''}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ — разложение (3). Предположим, что комплексный потенциал имеет внутри круга логарифмическую особенность в некоторой точке a. Тогда

$$f(\zeta) = A \ln(\zeta - a) + \varphi(\zeta), \tag{9}$$

где $\varphi(\zeta)$ — функция, голоморфная внутри круга.

Подставим (2), (3) и (9) в граничное условие (1). В результате получим

$$\frac{A\sigma}{\sigma - a} + \varphi'(\sigma)\sigma + \frac{\bar{A}}{1 - \bar{a}\sigma} + \overline{\varphi'(\sigma)}\,\bar{\sigma} =$$

$$= (2 + B_0 + \bar{B}_0)\varphi(\sigma) + (2 + B_0 + \bar{B}_0)\overline{\varphi(\sigma)} +$$

$$+ (2 + B_0 + \bar{B}_0) A\ln(\sigma - a) + (2 + B_0 + \bar{B}_0)\bar{A}\ln(\bar{\sigma} - \bar{a}) +$$

$$+ A\ln(\sigma - a)\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{B}_k\bar{a}_k}{\bar{a}_k\sigma - 1} + \bar{A}\ln(\bar{\sigma} - \bar{a})\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{B}_k\bar{a}_k}{\bar{a}_k\sigma - 1} +$$

$$+ A\ln(\sigma - a)\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k a_k\sigma}{a_k - \sigma} + \bar{A}\ln(\bar{\sigma} - \bar{a})\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k a_k\sigma}{a_k - \sigma}. \tag{10}$$

Разложим в (10) произведения рядов на логарифмы в суммы, умножим на ядро Коши и проинтегрируем по γ. Тогда получаем

$$\varphi'(\zeta)\zeta + \frac{\bar{A}}{1 - \bar{a}\zeta} = (A - \bar{A})(2 + B_0 + \bar{B}_0) +$$

$$+ (2 + B_0 + \bar{B}_0)\varphi(\zeta) + C - \bar{C} + \sum_{k=1}^{n}\frac{D_k}{\bar{a}_k\zeta - 1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{F}_k}{\bar{a}_k\zeta - 1} + E + E + \tau(\zeta) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{G}_k}{a_k\zeta - 1} + \psi(\zeta) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{H}_k}{\bar{a}_k\zeta - 1}, \tag{11}$$

где C, D_k, E, F_k, G_k, H_k, $\tau(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ входят в разложения

$$A\ln(\sigma - a)\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{B}_k\bar{a}_k}{\bar{a}_k\sigma - 1} = C\ln(\sigma - a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{D_k}{\bar{a}_k\sigma - 1},$$

$$A\ln(\sigma - a)\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k a_k\sigma}{a_k - \sigma} = E\ln(\sigma - a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{F_k\sigma}{a_k - \sigma}, \tag{12}$$

$$\varphi(\sigma)\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k a_k\sigma}{a_k - \sigma} = \tau(\sigma) + \sum_{k=1}^{n}\frac{G_k\sigma}{a_k - \sigma},$$

$$\varphi(\sigma)\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{B}_k\bar{a}_k}{\bar{a}_k\sigma - 1} = \psi(\sigma) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{H}_k}{\bar{a}_k\sigma - 1}.$$

Если предположить, что a не совпадает с a_k, то из сравнения степеней $\dfrac{1}{\bar{a}_k\zeta - 1}$ и $\dfrac{1}{\bar{a}\zeta - 1}$ получим сразу, что $A = 0$, а это означает, что логарифмические особенности комплексного потенциала могут быть расположены в точках, обратно сопряженных точкам ветвления отображающей функции. Аналогичный результат можно получить, если функция $\omega(\zeta)$ однолистно отображает внешность единичного круга на внешность исходной области. Как результат, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. *Если функция $\omega(\zeta)$ однолистно отображает внутренность (внешность) единичного круга на внутренность (внешность) односвязной области, ограниченной контуром L, составленным либо двумя траекториями пучка, либо одной замкнутой траекторией, то комплексный потенциал может иметь логарифмические особенности в точках, обратно сопряженных точкам ветвления отображающей функции.*

Результат последней теоремы может быть усилен, если учесть, что один из комплексных потенциалов, удовлетворяющих граничному условию (1), имеет вид

$$f(\zeta) = c \ln \frac{\omega'(\zeta)\zeta^2}{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \tag{13}$$

где c — действительное число.

Из (13) следует, что комплексный потенциал может иметь логарифмические особенности как в точках, обратно сопряженных точкам ветвления отображающей функции, так и в самих точках ветвления. Решение (13) отвечает, кроме того, на вопрос о существовании логарифмических особенностей в нуле и на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Глазер, Основы электронной оптики, ГИТТЛ, М., 1954.
2. Э. П. Гранкин, Решение обратной задачи корпускулярной оптики для цилиндрических полей, Труды семинара по прикладной математике, т. I, вып. 1, Изд-во АН УССР, К., 1963.
3. Г. А. Гринберг, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, ГИТТЛ, М., 1948.

Поступила 2.VIII 1966 г.
Институт математики АН УССР