УДК 519.2.21

# О времени пребывания двух независимых полумарковских процессов в заданном состоянии

*Л. М. Ковалева*

Рассмотрим некоторую систему $\Sigma_1$, которая в каждый момент времени может находиться в одном из $n$ состояний $E_1, E_2, \ldots, E_n$. В каждом из возможных состояний $E_i$ система проводит случайное время, не зависящее от времени, проведенного в предыдущих состояниях, после чего переходит с определенной вероятностью в состояние, отличное от $E_i$. Пусть $\Sigma_2$ — вторая система, которая может находиться в тех же состояниях, что и $\Sigma_1$ и эволюционирующая аналогично и независимо от первой. В настоящей заметке рассматривается задача о поведении среднего времени, в течение которого обе системы находятся в одном и том же состоянии.

Предположим, что система $\Sigma_1$ описывается следующими характеристиками. В начальный момент времени $t = 0$ система $\Sigma_1$ находится в состоянии $E_i$ с вероятностью $\pi_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$, $\pi_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$). Пусть $f_i(t)$ — плотность распределения вероятности времени пребывания в состоянии $E_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), а $p_{ij}$ — вероятности перехода из состояния $E_i$ в состояние

$E_j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$, $p_{ij} \geqslant 0$, $p_{ii} = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$). Пусть $\widetilde{\pi}_i$, $\widetilde{f}_i(t)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), $\widetilde{p}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) — аналогичные характеристики для системы $\Sigma_2$.

Определим сначала функции $P_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), равные вероятности того, что система $\Sigma_1$ в момент времени $t$ находится в состоянии $E_j$ при условии, что в момент времени $t = 0$ система находилась в состоянии $E_i$.

Рассматривая первый переход системы $\Sigma_1$ после начального момента времени, получаем следующие очевидные соотношения:

$$P_{ij}(t) = F_i(t)\,\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \int_0^t f_i(\tau)\, P_{kj}(t - \tau)\, d\tau \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$F_i(t) = \int_t^\infty f_i(t)\, dt, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Удобно перейти к матричным обозначениям:

$$\Pi = (p_{ik})_{i,k=1}^{n},$$

$$P(t) = (P_{ik}(t))_{i,k=1}^{n}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pi_n \end{pmatrix}.$$

$$H(t) = (f_i(t)\,\delta_{ik})_{i,k=1}^{n},$$

$$F(t) = (F_i(t)\,\delta_{ik})_{i,k=1}^{n},$$

Полученная система линейных интегральных уравнений может быть теперь записана в следующем виде:

$$P(t) = F(t) + \int_0^t H(\tau)\,\Pi P(t - \tau)\, d\tau. \tag{1}$$

Система (1) может быть решена с помощью преобразования Лапласа. Пусть $g^*(s)$ — преобразование Лапласа функции $g(t)$. Из соотношения (1) для преобразования Лапласа $P^*(s)$ матрицы $P(t)$ получаем равенство:

$$P^*(s) = F^*(s) + H^*(s)\,\Pi P^*(s),$$

откуда

$$P^*(s) = [I - H^*(s)\,\Pi]^{-1} F^*(s), \tag{2}$$

где $I$ — единичная матрица, а $H^*(s)$ — преобразование Лапласа матрицы $H(t)$. Отметим, что $F^*(s) = \frac{1}{s}[I - H^*(s)]$.

Легко видеть, что матрица $I - H^*(s)\,\Pi$ имеет обратную при значениях $s$ с $\operatorname{Re} s > 0$. Действительно, сумма элементов $i$-й строки, исключая элемент, стоящий на диагонали, равна

$$-\sum_{j=1}^{n} f_i^*(s)\, p_{ij} = -f_i^*(s) = -\int_0^\infty e^{-st} f_i(t)\, dt,$$

откуда $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} f_i^*(s)\, p_{ij}\right) < 1$ при $s$ с $\operatorname{Re} s > 0$.

Это означает, что для матрицы $I - H^*(s)\,\Pi$ выполняются условия теоремы Адамара (см. [1]) и, следовательно, матрица является неособенной.

Аналогичным образом в очевидных обозначениях для системы $\Sigma_2$ имеем:

$$\widetilde{P}^*(s) = [I - \widetilde{H}^*(s)\,\widetilde{\Pi}]^{-1}\,\widetilde{F}^*(s).$$

С учетом начального распределения для функции $P_j(t)$, $\widetilde{P}_j(t)$ — вероятности того, что система $\Sigma_1$ ($\Sigma_2$) находится в момент времени $t$ в состоянии $E_j$, найдем, что

$$Q(t) = \pi'\,P(t), \quad \widetilde{Q}(t) = \widetilde{\pi}'\,\widetilde{P}(t),$$

где $Q(t)$ — вектор-строка с компонентами $P_j(t)$, а $(a_{ij})' = (\bar{a}_{ii})$. Соответствующие преобразования Лапласа равны

$$Q^*(s) = \pi'\,P^*(s), \quad \widetilde{Q}^*(s) = \widetilde{\pi}'\,\widetilde{P}^*(s).$$

Отметим теперь, что среднее время, проведенное системой $\Sigma_1$ в состоянии $E_j$, равно

$$\int_0^T P_j(t)\,dt, \tag{3}$$

а среднее время, в течение которого обе системы $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$ находятся в состоянии $E_j$, равно интегралу

$$\int_0^T P_j(t)\,\widetilde{P}_j(t)\,dt. \tag{4}$$

Значения величин (3) и (4) зависят от плотности распределения вероятностей $f_j(t)$, $\widetilde{f}_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ и могут быть получены описанным выше способом. Ниже будет показано, что асимптотическое поведение величин (3) и (4) зависит только от первых моментов плотностей $f_j(t)$, $\widetilde{f}_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Допустим, что интегралы $\int_0^\infty t f_j(t)\,dt = \mu_j$ существуют и $\mu_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Действительно, применяя тауберову теорему [2] к функции $P_j(t)$ и ее преобразованию Лапласа $P_j^*(s)$, для величины (3) получаем:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_j(t)\,dt = \lim_{s\to 0} sP_j^*(s)$$

или в векторном виде:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q(t)\,dt = \lim_{s\to 0} sQ^*(s).$$

Учитывая равенство (2), для предела $\lim\limits_{s\to 0} sQ^*(s)$ имеем:

$$\lim_{s\to 0} sQ^*(s) = \pi' \lim_{s\to 0} s\,[I - H^*(s)\,\Pi]^{-1}\,F^*(s). \tag{5}$$

Пусть $\Delta(s)$ — определитель матрицы $I - H^*(s)\,\Pi$, а $\Delta_{ij}(s)$ — алгебраические дополнения элемента этой матрицы с индексами $i$ и $j$. Отметим, что

$\Delta_{ij}(s)$ при $s \to 0$ сходится к алгебраическому дополнению соответствующего элемента $\Delta_{ij}^0$ матрицы $I - \Pi$. Простые вычисления показывают, что

$$\Delta'(0) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \Delta_{kk}^0.$$

Из теоремы Адамара следует, что $\Delta'(0) > 0$. При сделанных предположениях функция $F^*(s)$ при $s \to 0$ имеет предел, равный $(\mu_j \delta_{ij})_{i,j=1}^n = M$.

Рассуждения, приведенные выше, доказывают существование предела в формуле (5) и показывают, что этот предел равен $\frac{1}{\Delta'(0)} \pi' DM = Q^0$,

где $D = (\Delta_{ij}^0)_{i,j=1}^n$, а $Q^0$ — строка с элементами $\frac{1}{\Delta'(0)} \mu_j \sum_{k=1}^{n} \pi_k \Delta_{kj}^0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Полученный результат означает, что среднее время, проведенное системой $\Sigma_1$ в состоянии $E_i$ за время работы системы в интервале времени $(0, T)$, асимптотически равно

$$\frac{\mu_i \sum\limits_{k=1}^{n} \pi_k \Delta_{ki}^0}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \Delta_{kk}^0} \cdot T. \tag{6}$$

В частном случае, когда все $p_{ik} = \frac{1}{n-1}$, выражение (6) равно:

$$\frac{\mu_i}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k} \cdot T \quad (i \neq k).$$

При изучении поведения среднего времени, в течение которого обе системы находятся в состоянии $E_j$, проводятся аналогичные рассуждения. Для преобразования Лапласа произведения функций $P_j(t) \cdot \widetilde{P}_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ используем следующую известную формулу:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} P_j^*(z) \widetilde{P}_j^*(s-z)\, dz = q(s),$$

где $a > 0$ и $\operatorname{Re} s > a$.

Используя рассуждения, проведенные выше для изучения случая среднего времени пребывания одной системы в некотором состоянии, находим:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_j(t) \widetilde{P}_j(t)\, dt = \lim_{s \to 0} sq(s) = \frac{\mu_j \widetilde{\mu}_j}{\Delta'(0) \widetilde{\Delta}'(0)} \sum_{k=1}^{n} \pi_k \Delta_{kj}^0 \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\pi}_k \widetilde{\Delta}_{kj}^0. \tag{7}$$

При $p_{ik} = \frac{1}{n-1}$ $(i \neq k)$ формула (7) упрощается.

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_j(t) \widetilde{P}_j(t)\, dt = \frac{\mu_j \widetilde{\mu}_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j \sum\limits_{j=1}^{n} \widetilde{\mu}_j}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Пароди, Локализация характеристических чисел матриц и ее применения, ИЛ. М., 1960.
2. Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, М., 1951.

Поступила 29.VII 1966 г.,
после переработки — 15.II 1968 г.
Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко