УДК 519.44

# О рациональной тензорной алгебре модулярных представлений циклической $p$-группы

*В. П. Рудько*

Пусть $G_\alpha = (a)$ — циклическая группа порядка $q = p^\alpha$ ($\alpha \geqslant 0$ — целое); $F$ — поле характеристики $p$; $V_i$ — жорданов ящик порядка $i$ с единицами по диагонали.

Как известно, неразложимые $F$-представления группы $G_\alpha$ имеют вид:

$$a \to V_i \qquad (i = 1, \ldots, q).$$

Пусть $R$ — поле рациональных чисел. Рациональной алгеброй $K_\alpha$ $F$-представлений группы $G_\alpha$ будем называть $R$-модуль, порожденный формальными суммами $\sum\limits_{r=1}^{q} \alpha_r V_r$, со следующими операциями:

$$\sum_r \alpha_r V_r + \sum_r \beta_r V_r = \sum_r (\alpha_r + \beta_r) V_r, \quad \sum \alpha_r V_r \cdot \sum_r \beta_r V_r = \sum_{r,s} \alpha_r \beta_s V_r \cdot V_s,$$

где $V_r \cdot V_s$ — тензорное произведение представлений $V_r$ и $V_s$.

Следующая теорема указывает соотношения, которые определяют алгебру $K_{\alpha+1}$ как расширение алгебры $K_\alpha$.

Теорема 1 [1]. *Пусть* $\theta = V_{q+1} - V_{q-1}$. *Тогда*

$$V_r \theta = V_{r+q} - V_{q-r} \qquad (1 \leqslant r \leqslant q), \tag{1}$$

$$V_r \theta = V_{r+q} + V_{r-q} \qquad (q \leqslant r \leqslant (p-1)\,q), \tag{2}$$

$$V_r \theta = V_{r-q} + 2V_{pq} - V_{2pq-(r+q)} \qquad ((p-1)\,q \leqslant r \leqslant pq). \tag{3}$$

Целью данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Алгебра* $K_\alpha$ *изоморфна ортогональной сумме поля* $R$ *и* $t_\alpha = \dfrac{2(p^\alpha - 1)}{p-1}$ — *экземпляров поля* $R(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$, *где* $\varepsilon$ — *первообразный корень степени* $p$ *из единицы.*

Докажем предварительно несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. (следствие из теоремы 1). *Каждый элемент* $y \in K_{\alpha+1}$ *может быть представлен в виде*:

$$y = \Lambda_0 + \Lambda_1 \theta + \ldots + \Lambda_{p-1} \theta^{p-1},$$

*где* $\Lambda_i \in K_\alpha$.

Доказательство. Введем в рассмотрение многочлены *

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^i C_{n-i}^i x^{n-2i}.$$

Нетрудно убедиться, что имеет место соотношение

$$S_{n+1}(x) = xS_n(x) - S_{n-1}(x). \tag{4}$$

Пусть $y = V_{kq+r}$, где $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $0 \leqslant r \leqslant q$. Тогда

$$y = V_{kq+r} = V_r S_k(\theta) + V_{q-r} S_{k-1}(\theta). \tag{5}$$

Действительно, в силу (1) следует

$$V_{q+r} = V_r \theta + V_{q-r} = V_r S_1(\theta) + V_{q-r} S_0(\theta),$$

т. е. при $k = 1$ формула (5) справедлива.

Сделаем индуктивное предположение. Пусть соотношение (5) имеет место для $k < p-1$. Тогда из (2) имеем

$$V_{(k+1)q+r} = V_{kq+r}\theta - V_{(k-1)q+r}.$$

Откуда, используя (5) и (4), получим

$$V_{(k+1)q+r} = V_r S_{k+1}(\theta) + V_{q-r} S_k(\theta).$$

Индукция завершена. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $K_\alpha[x]$ — кольцо полиномов от неизвестного $x$ над кольцом $K_\alpha$ и $f(x) = (x - 2V_q + 2V_{q-1}) S_{p-1}(x) \in K_\alpha[x]$. Тогда $f(\theta) = 0$.*

Доказательство. В силу (5)

$$S_{p-1}(\theta) - S_{p-3}(\theta) = S_{p-1}(\theta) + V_{q-1}S_{p-2}(\theta) - V_{q-1}S_{p-2}(\theta) -$$
$$- S_{p-3}(\theta) = V_{(p-1)q+1} - V_{(p-1)q-1}$$

и

$$S_{p-2}(\theta) - S_{p-4}(\theta) = V_{(p-2)q+1} - V_{(p-2)q-1}.$$

Далее, вследствие (2)

$$V_{(p-1)q-1} \cdot \theta = V_{pq-1} + V_{(p-2)q-1}$$

и на основании (3)

$$V_{(p-1)q+1} \cdot \theta = V_{(p-2)q+1} + 2V_{pq} - V_{pq-1}.$$

Тогда

$$(S_{p-1}(\theta) - S_{p-3}(\theta))\,\theta = S_{p-2}(\theta) - S_{p-4}(\theta) + 2(V_{pq} - V_{pq-2}). \tag{6}$$

Из (6), с учетом вытекающих из (5) равенств

$$V_{pq} = V_q S_{p-1}(\theta) \text{ и } V_{pq-1} = V_{q-1}S_{p-1}(\theta) + S_{p-2}(\theta),$$

получим:

$$(S_{p-1}(\theta) - S_{p-3}(\theta))\,\theta = 2(V_q - V_{q-1}) S_{p-1}(\theta) - S_{p-2}(\theta) - S_{p-4}(\theta),$$

что дает в силу (4), равенство

$$(\theta - 2V_q + 2V_{q-1}) S_{p-1}(\theta) = 0 \text{ или } f(\theta) = 0.$$

Лемма доказана.

---

* Эти многочлены представляют собой полиномы Чебышева второго рода от половинного аргумента.

Лемма 3. *Пусть* $\beta_s = \varepsilon^s + \varepsilon^{-s}$. *Тогда* $S_{p-1}(x) = \prod_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} (x^2 - \beta_s^2)$. *Если* $\bar{f}(x) = \prod_s (x - \beta_s)$, *то коэффициенты* полинома $\bar{f}(x)$ *принадлежат полю* $R$. *Полином* $\bar{f}(x)$ *неприводим над полем* $R$ *и* $S_{p-1}(x) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \bar{f}(x)\bar{f}(-x)$.

Доказательство. Имеет место формула

$$S_{p-1}(x) = \frac{2\sin\left(p\arccos\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Если $S_{p-1}(x) = 0$, то $p\arccos\frac{x}{2} = \pi k$ $(k \neq 0)$, откуда $x = 2\cos\frac{\pi k}{p}$. Мы имеем $p-1$ различных корней уравнения $S_{p-1}(x) = 0$:

$$x_s = \pm 2\cos\frac{\pi s}{p} \quad \left(s = 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\right).$$

Следовательно,

$$S_{p-1}(x) = \prod_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(x^2 - 4\cos^2\frac{\pi s}{p}\right).$$

Далее,

$$\frac{(\varepsilon^k+1)^2}{\varepsilon^k} = \begin{cases} \beta_{\frac{k}{2}}, & \text{если } k \text{ — четное,} \\ \beta_{\frac{p-k}{2}}, & \text{если } k \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Если $\varepsilon = \cos^2\frac{\pi}{p} + i\sin^2\frac{\pi}{p}$, то

$$\frac{(\varepsilon^k+1)^2}{\varepsilon^k} = \varepsilon^k + 2 + \varepsilon^{-k} = 4\cos^2\frac{\pi k}{p}.$$

Тогда

$$S_{p-1}(x) = \prod_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} (x^2 - \beta_s^2).$$

Автоморфизмы из группы Галуа поля $R(\varepsilon)$ над $R$ переводят элементы $\beta_s$ $\left(s \leqslant \frac{p-1}{2}\right)$ друг в друга, и поэтому коэффициенты многочлена $\bar{f}(x) = \prod_s (x - \beta_s)$ принадлежат полю рациональных чисел $R$. Очевидно, что $\bar{f}(x)$ неприводим над $R$ и $S_{p-1}(x) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \bar{f}(x)\cdot\bar{f}(-x)$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Применим индукцию по числу $\alpha$. При $\alpha = 0$ $K_0 = R$ и, следовательно, теорема выполняется. Предположим, что

$$K_\alpha = R_0 + \sum_{i=1}^{t_\alpha} R_i, \tag{7}$$

где

$$R_0 \cong R, \qquad R_i \cong R(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) \qquad (i = 1, \ldots, t_\alpha),$$

и покажем, что для алгебры $K_{\alpha+1}$ имеет место аналогичное разложение.

Рассмотрим отображение $\varphi: K_\alpha[x] \to K_{\alpha+1}$ $\varphi\left(\sum_i \Lambda_i x^i\right) = \sum_i \Lambda_i \theta^i$ $(\Lambda_i \in K_\alpha)$.

В силу леммы 1 $\varphi$ — эпиморфизм кольца $K_\alpha[x]$ на алгебру $K_{\alpha+1}$. Пусть идеал $I \supset K_\alpha[x]$ — ядро гомоморфизма $\varphi$. Поскольку $K_\alpha$ — ортогональная сумма полей, то $K_\alpha[x]$ — ортогональная сумма колец полиномов от неизвестного $x$ над этими полями и, следовательно, $K_\alpha[x]$ — кольцо главных идеалов. Тогда $I = (g(x))$, где $g(x)$ — некоторый полином из $K_\alpha[x]$. Покажем, что $I = (f(x))$. Поскольку $f(\theta) = 0$, то $f(x) \in I$. Далее, элементы $1, \theta, \ldots, \theta^{p-1}$ линейно независимы над $K_\alpha$ (в противном случае элементы $V_1, V_2, \ldots, V_{pq}$ были бы зависимыми над полем $R$), следовательно, степень полинома $g(x)$ не меньше $p$, а так как $g(x)$ порождает $I$ и степень $f(x)$ равна $p$, то $(f(x)) = (g(x))$.

Гомоморфизм $\varphi$ индуцирует изоморфизм

$$K_{\alpha+1} \cong K_\alpha[x]/I = \sum_{i=0}^{t_\alpha} R_i[x]/I.$$

В силу (7) каждый элемент $\gamma \in K_\alpha$ допускает однозначную запись в виде

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{t_\alpha},$$

$$\text{где } \gamma_i \in R_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, t_\alpha).$$

В частности,

$$2(V_q - V_{q-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{t_\alpha} \quad (\alpha_i \in R_i, \ \ i = 0, \ldots, t_\alpha).$$

Обозначим через $f_i(x)$ полином над полем $R_i$ $(i = 0, \ldots, t_\alpha)$, в который переходит полином $f(x)$ над кольцом $K_\alpha$ при замене каждого коэффициента $\gamma \in K_\alpha$ полинома $f(x)$ его компонентой $\gamma_i \in R_i$ $(i = 0, \ldots, t_\alpha)$.

Легко видеть, что

$$f_i(x) = (x - \alpha_i) S_{p-1}(x).$$

Имеем

$$K_{\alpha+1} \cong K_\alpha[x]/I \cong \sum_{i=0}^{t_\alpha} R_i[x]/f_i(x). \tag{8}$$

Так как $S_{p-1}(x) = \bar{f}(x) \cdot \bar{f}(x)$ и $\bar{f}(x) = \prod_s (x - \varepsilon^s - \varepsilon^{-s})$, то все корни полинома $f_i(x)$ при $i = 1, \ldots, t_\alpha$ принадлежат полю $R_i$. При этом полином $f_i(x)$ не имеет кратных корней в этом поле. В противном случае, кольцо $R_i[x]/f_i(x)$ содержало бы нильпотентные элементы, что противоречит полупростоте алгебры $K_{\alpha+1}$ [1].

Таким образом,

$$R_i[x]/f_i(x) \cong \underbrace{R_i + \ldots + R_i}_{p} \qquad (i = 1, \ldots, t_\alpha). \tag{9}$$

Далее, фактор-кольцо

$$R_0[x]/f_0(x) \cong R_0[x]/(x - \alpha_0) + R_0[x]/\bar{f}(x) +$$
$$+ R_0[x]/\bar{f}(-x) \cong R + R(\varepsilon + \varepsilon^{-1}) + R(\varepsilon + \varepsilon^{-1}). \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим

$$K_{\alpha+1} \cong R_0 + \sum_{i=1}^{t_{\alpha+1}} R_i, \qquad R_0 \cong R, \qquad R_i \cong R(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$$

$$(i = 1, \ldots, t_{\alpha+1}) \left( t_{\alpha+1} = \frac{2(p^{\alpha+1} - 1)}{p - 1} \right).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Green, The modular representation algebra of a finite group. Illinois J. Math., **6**, N 4, 1962.

Поступила 8.VII 1966 г.
Ужгородский гос. университет