УДК 512.8

Замечание о строении инвариантов Аронгольда

С. И. Чернышев

В работе [1] Аронгольд установил представления куба инварианта S и дискриминанта симметрической кубической тернарной формы в виде двумерных детерминантов 6-го порядка. В настоящей заметке устанавливаются представления инварианта S в виде трехмерного детерминанта 3-го порядка и представление инварианта T в виде четырехмерного гипердетерминанта 3-го порядка. Терминология и обозначения заимствованы из [2].

1. Будем рассматривать в комплексной (вещественной) области симметрическую кубическую тернарную форму

$$f = \sum_{i_1=1}^{3} \sum_{i_2=1}^{3} \sum_{i_3=1}^{3} A_{i_1 i_2 i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \tag{1}$$

с соответствующей симметрической кубической матрицей

$$A = \| A_{i_1 i_2 i_3} \| \qquad (i_1,\ i_2,\ i_3 = 1,\ 2,\ 3).$$

Пусть*

$$C_{jk\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu} \begin{array}{l} \\ \left| \begin{array}{c|c} A_{j\mu_1\nu_1} A_{j\mu_1\nu_2} & A_{k\mu_1\nu_1} A_{k\mu_1\nu_2} \\ & \\ A_{j\mu_2\nu_1} A_{j\mu_2\nu_2} & A_{k\mu_2\nu_1} A_{k\mu_2\nu_2} \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \overset{+}{(i_1)} \\ \longrightarrow (i_3) \\ \downarrow \\ (i_2) \end{array} \qquad (j,\ k,\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3), \tag{2}$$

где каждый из рядов индексов

$$\mu,\ \mu_1 < \mu_2,$$
$$\nu,\ \nu_1 < \nu_2$$

образует последовательность в некотором порядке цифр 1, 2, 3.

---

* Выражения $C_{jk\mu\nu}$ совпадают, соответственно, с выражениями $(a_j a_k)^{\mu\nu}$, рассматривавшимися Аронгольдом [1]; в [2] принято обозначение $C_{jk}^{(\mu\nu)}$.

Образуем матрицу

$$C = \| C_{i_1 i_2 i_3 i_4} \| \qquad (i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, 2, 3).$$

Лемма 1.

1) $C_{i_1 i_2 i_3 i_4} = C_{i_2 i_1 i_3 i_4}$, $\qquad i_1, i_2, i_3, i_4 = 1,, 2, 3$;

2) $C_{i_1 i_2 i_3 i_4} = C_{i_1 i_2 i_4 i_3}$, $\qquad i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, 2, 3$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из того, что от перестановки двух сечений одной и той же неальтернативной ориентации кубический детерминант не изменяется. Второе утверждение вытекает из определения (2) и симметричности матрицы A.

Следствие. *Среди элементов матрицы C не более 36 различных.*

Лемма 2. *Симметрическое элементарное преобразование* $\boxed{l} \cdot t$ $(l = 1, 2, 3, t \neq 0)$ *матрицы A порождает умножение всех элементов матрицы C на* t^2 *и симметрические элементарные преобразования* $\boxed{l(i_1 i_2)} \cdot t$, $\boxed{l(i_3 i_4)} \cdot \frac{1}{t}$ *матрицы C.*

Доказательство. Согласно (2)

$$C_{lmln} = A_{llm}A_{mmn} - A_{lln}A_{mmm}, \quad l, m, n = 1, 2, 3; \quad l \neq m, \quad l \neq n, \quad m \neq n.$$

В результате симметрического элементарного преобразования $\boxed{l} \cdot t$ матрицы A получим

$$C'_{lmln} = A'_{llm}A'_{mmn} - A'_{lln}A'_{mmm},$$

где

$$A'_{llm} = t^2 A_{llm}, \; A'_{mmn} = A_{mmn}, \; A'_{lln} = t^2 A_{lln}, \; A'_{mmm} = A_{mmm},$$

т. е. $C'_{lmln} = t^2 \cdot C_{lmln}$, что и требовалось проверить. Аналогично рассматриваются остальные 35 случаев.

Лемма 3. *Симметрическое элементарное преобразование* $\boxed{m} + \boxed{l} \cdot t$, $(m, l = 1, 2, 3, m \neq l, t \neq 0)$ *матрицы A порождает симметрические элементарные преобразования* $\boxed{m(i_1 i_2)} + \boxed{l(i_1 i_2)} \cdot t$, $\boxed{l(i_3 i_4)} + \boxed{m(i_3 i_4)} \cdot (-t)$ *матрицы C.*

Доказательство. $C_{lmln} = A_{llm}A_{mmn} - A_{lln}A_{mmm}$, $l \neq m$, $l \neq n$; $m \neq n$; $l, m, n = 1, 2, 3$. В результате симметрического элементарного преобразования $\boxed{m} + \boxed{l} \cdot t$ матрицы A получим

$$C''_{lmln} = A''_{llm}A''_{mmn} - A''_{lln}A''_{mmm},$$

где

$$A''_{llm} = A_{llm} + tA_{lll}, \quad A''_{mmn} = A_{mmn} + 2tA_{lmn} + t^2 A_{lln},$$

$$A''_{lln} = A_{lln}, \; A''_{mmm} = A_{mmm} + 3tA_{lmm} + 3t^2 A_{llm} + t^3 A_{lll}.$$

Произведя несложный подсчет, получим

$$C''_{lmln} = C_{lmln} - tC_{lmmn} + tC_{llln} - t^2 C_{llmn}.$$

Этот же результат получим, последовательно выполняя симметрические элементарные преобразования $\boxed{m(i_1 i_2)} + \boxed{l(i_1 i_2)} \cdot t$ и $\boxed{l(i_3 i_4)} + \boxed{m(i_3 i_4)} \times$ $\times (-t)$ матрицы C.

Аналогично рассматриваются остальные 35 случаев.

2. Теорема 1. 1. *Гипердетерминант* $|C_{\underset{i_1}{\pm}\underset{i_2}{\pm}\underset{i_3}{\pm}\underset{i_4}{\pm}}|$ $(i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, 2, 3)$ *служит относительным инвариантом веса 6 тернарной кубической формы* (1).

2. $T = -\frac{1}{2} |C_{\underset{i_1}{\pm}\underset{i_2}{\pm}\underset{i_3}{\pm}\underset{i_4}{\pm}}|$.

Доказательство. Так как симметрические элементарные преобразования $\overline{|m(i_1 i_2)|} + \overline{|l(i_1 i_2)|}\cdot t$ и $\overline{|l(i_3 i_4)|} + \overline{|m(i_3 i_4)|}\cdot(-t)$ матрицы C, очевидно, не влияют на величину рассматриваемого гипердетерминанта, то для доказательства первого утверждения теоремы достаточно показать, что симметрическое элементарное преобразование $|\underline{l}|\cdot t$ матрицы A влечет за собой умножение гипердетерминанта на t^6.

Каждый член рассматриваемого гипердетерминанта является (с точностью до знака) произведением 3 элементов матрицы C, причем среди первых индексов сомножителей «l» встречается точно один раз; среди вторых индексов сомножителей «l» встречается точно один раз и т. д. Согласно лемме 2 в результате симметрического элементарного преобразования $|\underline{l}|\cdot t$ матрицы A каждый член гипердетерминанта умножается на

$$t^6\cdot t\cdot t\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t}=t^6,$$

т. е. и сам гипердетерминант умножается на t^6. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение теоремы проверяется непосредственным подсчетом.

3. Теорема 2.

$$\begin{array}{c}\xrightarrow{\qquad} \overset{+}{(i)}\\ \left|\begin{array}{c|c|c} C_{\widehat{11}\alpha\beta}C_{\widehat{12}\alpha\beta}C_{\widehat{13}\alpha\beta} & A_{\alpha11}A_{\alpha12}A_{\alpha13} & A_{\beta11}A_{\beta12}A_{\beta13}\\ C_{\widehat{21}\alpha\beta}C_{\widehat{22}\alpha\beta}C_{\widehat{23}\alpha\beta} & A_{\alpha21}A_{\alpha22}A_{\alpha23} & A_{\beta21}A_{\beta22}A_{\beta23}\\ C_{\widehat{31}\alpha\beta}C_{\widehat{32}\alpha\beta}C_{\widehat{33}\alpha\beta} & A_{\alpha31}A_{\alpha32}A_{\alpha33} & A_{\beta31}A_{\beta32}A_{\beta33}\end{array}\right| \begin{array}{l}\to(k)\\ \downarrow\\ (j)\end{array}\end{array} = \begin{cases} S & \text{при } \alpha=\beta,\\ \dfrac{S}{2} & \text{при } \alpha\neq\beta,\end{cases}$$

где $\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3.$

Доказательство. Рассматриваемый кубический детерминант равен сумме произведений всех элементов первого сечения неальтернативной ориентации на их алгебраические дополнения. Но в силу определения (2) алгебраическим дополнением элемента $C_{\widehat{mn}\alpha\beta}$ $(m,\ n,\ \alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3)$ служит $C_{\alpha\beta mn}$. Имеем:

$$\begin{array}{c}\xrightarrow{\qquad} \overset{+}{(i)}\\ \left|\begin{array}{c|c|c} C_{\widehat{11}\alpha\beta}C_{\widehat{12}\alpha\beta}C_{\widehat{13}\alpha\beta} & A_{\alpha11}A_{\alpha12}A_{\alpha13} & A_{\beta11}A_{\beta12}A_{\beta13}\\ C_{\widehat{21}\alpha\beta}C_{\widehat{22}\alpha\beta}C_{\widehat{23}\alpha\beta} & A_{\alpha21}A_{\alpha22}A_{\alpha23} & A_{\beta21}A_{\beta22}A_{\beta23}\\ C_{\widehat{31}\alpha\beta}C_{\widehat{32}\alpha\beta}C_{\widehat{33}\alpha\beta} & A_{\alpha31}A_{\alpha32}A_{\alpha33} & A_{\beta31}A_{\beta32}A_{\beta33}\end{array}\right| \begin{array}{l}\to(k)\\ \downarrow\\ (j)\end{array}\end{array} =$$

$$= C_{11\alpha\beta}C_{\alpha\beta11} + C_{12\alpha\beta}C_{\alpha\beta12} + C_{13\alpha\beta}C_{\alpha\beta13} + C_{21\alpha\beta}C_{\alpha\beta21} + C_{22\alpha\beta}C_{\alpha\beta22} +$$
$$+ C_{23\alpha\beta}C_{\alpha\beta23} + C_{31\alpha\beta}C_{\alpha\beta31} + C_{32\alpha\beta}C_{\alpha\beta32} + C_{33\alpha\beta}C_{\alpha\beta33}.$$

В правой части полученного равенства стоит как раз то выражение, которое, как показал Аронгольд, равно S при $\alpha=\beta$ и равно $\dfrac{S}{2}$ при $\alpha\neq\beta$.

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Н. П. Соколову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Aronhold, Theorie der homogenen Funktionen dritten Grades von drei Veränderlichen, Journ. für die reine und angew. Math., 55, 1858, 97—191.
2. Н. П. Соколов, Пространственные матрицы и их приложения, М., 1960.

Поступила 18.X 1966 г.
Киевский технологический ин-т
легкой промышленности