УДК 531.36+534

Об устойчивости движения на заданном множестве в конечном при постоянно действующих возмущениях

Н. Ф. Кириченко

Рассмотрим движения при постоянно действующих возмущениях, которые описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + R_i(x, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где c_{ij} — постоянные величины; $R_i(x, t)$ — функции, описывающие постоянно действующие возмущения; невозмущенное движение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ системы

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \bar{x}_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Определение. Множество

$$\Gamma_1 = \{x: |x_i| \leqslant \bar{x}_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{2}$$

назовем устойчивым при постоянно действующих возмущениях в множестве

$$\Gamma_2 = \{x: |x_i| \leqslant \bar{\bar{x}}_i; \quad i = 1,2, \ldots, n\} \tag{3}$$

по отношению к траекториям системы (1), если существует $T > 0$, что если только

$$x(0) \in \Gamma_2, \quad |R_i(x, t| \leqslant \bar{R}_i \quad = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

то

$$x(t) \in \Gamma_1 \tag{5}$$

для всех $t \geqslant T$. При этом предполагается, что $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, $\bar{R}_i$ — заданные наперед положительные величины.

Найдем условия, при которых система обладает такого рода устойчивостью. Для этого вокруг параллелепипеда (3) опишем эллипсоид

$$v(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = c_2, \tag{6}$$

где

$$c_2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \bar{\bar{x}}_i \bar{\bar{x}}_j, \tag{7}$$

a_{ij} определяются согласно равенству

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \sum_{\Gamma=1}^{n} c_{ir} x_r = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{8}$$

С другой стороны, согласно работе [1] в параллелепипед (2) впишем эллипсоид

$$v(x) = c_1, \tag{9}$$

где

$$c_1 = \min_{i=1,2,\ldots,n} \frac{\bar{x}_i^2 \cdot \Delta}{\Delta_{ii}}, \tag{10}$$

Δ — дискриминант квадратичной формы $v(x)$, Δ_{ii} — дополнение к его элементам. Нетрудно установить, что n-мерная сфера с радиусом

$$r = \sqrt{\frac{c_1}{\sum\limits_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|}} \tag{11}$$

вписывается в эллипсоид (9), ни в одной точке фазового пространства его не касаясь.

Рассмотрим производную от функции Ляпунова $V(x)$ по времени на траекториях системы (1):

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(1)} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i R_j(x, t). \tag{12}$$

Условие

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{(1)} < 0 \tag{13}$$

на множестве G_2/G_1 обеспечит системе (1) качество рассматриваемой нами устойчивости, при этом

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= \{x{:}v(x) \leqslant c_1\}; \\ G_2 &= \{x{:}v(x) \leqslant c_2\}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Пусть

$$G_3 = \left\{x{:} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \Gamma^2\right\}, \tag{15}$$

тогда $G_2 \setminus G_3 \supset G_{12} \setminus G_1$. Поэтому, если соотношение (13) имеет место на $G_2 \setminus G_3$, то оно имеет место и на $G_2 \setminus G_1$, но для этого согласно выражению (12) достаточно условия

$$2 \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \tilde{x}_i \bar{R}_j < r^2, \tag{16}$$

где

$$\tilde{x}_i = \sqrt{\frac{c_2 \cdot \Delta_{ii}}{\Delta}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Условие (16) с учетом (17), (11), (7) имеет вид:

$$2 \sum_{r,l=1}^{n} |a_{rl}| \bar{\bar{x}}_r \bar{\bar{x}}_l \sum_{k,s=1}^{n} |a_{ks}| \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \bar{R}_j \sqrt{\Delta_{ii}} \leqslant \Delta^{3/2} \min_{i=1,2,\ldots,n} \frac{\bar{x}_i^2}{\Delta_{ii}}. \tag{18}$$

Из формулы (18) можно также делать выводы другого рода. Если до заданной системы прикладываются постоянно действующие возмущения, удовлетворяющие неравенству (18), то система за некоторое время попадает в множество Γ_1 фазового пространства, лишь в начальный момент она находилась в множестве Γ_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Горбунов, Об одном методе получения оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, Вестник МГУ, № 10, 1950.
2. В. И. Зубов, Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд-во ЛГУ, 1957.

Поступила 21.VIII 1967 г.,
после переработки — 18.XII 1967 г.
Институт гидромеханики АН УССР