УДК 517.5

Об одном многомерном аналоге формулы Коши

И. А. Морев

Пусть f, ζ, η — функции многих действительных переменных $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой области D эвклидова пространства $(x_1, \ldots, x_n)$ со значениями из какой-нибудь ассоциативной и коммутативной алгебры A с единицей и конечного ранга над полем комплексных чисел, причем $f \in C^1(D)$; $\zeta, \eta \in C^2(D)$.

В работе [1] доказано, что условия вида:

$$1^\circ \text{ существует } \delta^{-1}, \text{ где } \delta = \frac{\partial\zeta}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_2} - \frac{\partial\zeta}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_1};$$

$$2^\circ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\right)^2 = 0, \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right)^2 = 0;$$

$$3^\circ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_i} - \frac{\partial\zeta}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (k = 1, 2)$$

являются необходимыми и достаточными для существования в области D следующего аналога формулы Коши:

$$\frac{1}{\omega\delta(M)} \oint_q S(M, P) f(P)\, dq = \begin{cases} 0, & \text{если } M \overline{\in} \overline{Q}, \\ f(M), & \text{если } M \in \overline{Q}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь f — функция, моногенная по функциям ζ и η в области D (см. [2]), $M(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — любая точка области D вне или внутри $\overline{Q}$:

$$S(M, P) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ \alpha_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \end{vmatrix} g^{k1}(P) + \begin{vmatrix} \alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \alpha_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \end{vmatrix} g^{k2}(P) + \alpha_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\, \delta(P) \right\},$$

Q — всякая n-мерная ограниченная область с кусочно-гладкой границей $q\,(\overline{Q} \subset D)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности q в ее текущей точке $P(x_1, \ldots, x_n)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = (x_k - x_k^0)\, r^{-n}$, $k = 1, \ldots, n$, $r = |\overline{MP}|$, ω — площадь единичной $(n-1)$-мерной сферы; $g^{k1} = \frac{\partial\zeta}{\partial x_2} \times \frac{\partial\eta}{\partial x_k} - \frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_2}$; $g^{k2} = \frac{\partial\zeta}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_1} - \frac{\partial\zeta}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_k}$.

В настоящей заметке выясняется, что формула (1) невозможна для $n = 2$ и $n = 3$, но она справедлива для любого $n > 3$. Действительно, при $n = 3$ из 2° находим

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial\zeta}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x_2} = -\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_3}\right)^2, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \frac{\partial\xi}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_2} = -\frac{\partial\zeta}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_3},$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial\eta}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x_2} = -\frac{\partial\zeta}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_1} + \frac{\partial\eta}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x_2} = -\left(\frac{\partial\eta}{\partial x_3}\right)^2,$$

откуда следует, что $\delta^3 = 0$ и поэтому при $n = 3$ формула (1) не имеет места (аналогично при $n = 2$).

Далее, легко видеть, что при $n > 3$ в любой алгебре A условия 1°, 2°, 3° будут выполняться и потому формула (1) будет иметь место, если взять $\zeta = a_1 x_1 + \sum_{k=3}^{n-1} a_k x_k$, $\eta = a_2 x_2 + a_n x_n$, где все a_n — постоянные (например, комплексные числа), причем a_1^{-1} и a_2^{-1} существуют и $a_1^2 = -\sum_{k=3}^{n-1} a_k^2$, $a_n^2 = -a_2^2$. А также можем взять, например, 1) $\zeta = x_1 + ix_3 + \varepsilon [h(x_1 + ix_3) + x_2 - ix_4]$; $\eta = x_2 + ix_4 + \varepsilon [H(x_2 + ix_4) - (x_1 - ix_3)]$, где $n = 4$, $h(H)$ — голоморфная функция от $x_1 + ix_3 (x_2 + ix_4)$, $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$; 2) $\zeta = h(x_1 + ix_3) + \varepsilon\Phi(x_5, \ldots, x_n)$, $\eta = H(x_2 + ix_4) + \varepsilon\psi(x_5, \ldots, x_n)$, где $n \geqslant 5$, $h(H)$ — голоморфная функция от $x_1 + ix_3 (x_2 + ix_4)$ с производной отличной от нуля, Φ и ψ — гармонические функции своих аргументов со значениями в любой алгебре A, $\varepsilon^2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Морев, О некоторых интегральных свойствах моногенных гипер-комплексных функций, Изв. вузов, сер. матем., № 6, 1963.
2. И. А. Морев, Об одном обобщении понятия моногенных функций, Матем. сб., 42 (84), 1957.

Поступила 15.VI 1966 г.,
после переработки — 10.X 1967 г.

Ивановский энергетический институт