УДК 517.917

Динамическая устойчивость маятника, заполненного вязкой жидкостью

Т. Г. Стрижак

В настоящей работе исследуется динамическая устойчивость верхнего положения равновесия маятника, целиком заполненного вязкой жидкостью, ось подвеса которого совершает вертикальные гармонические колебания с малой амплитудой a и высокой частотой ω.

Уравнение колебаний такого маятника имеет вид [1]

$$\ddot{\Theta} + \lambda \sqrt{\nu} \int_0^t \ddot{\Theta}(t - \tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\pi\tau}} + \Omega^2 (1 - \delta \cos \omega t) \sin \Theta = 0, \tag{1}$$

где

$$\lambda = \frac{MQ}{I + Ml^2}; \qquad \Omega^2 = g \frac{M_1 l_1 + Ml}{I + Ml^2}; \qquad MQ = 2\pi\varrho \int_{\beta_1}^{\beta_2} r^3(\beta)\, d\beta; \qquad \delta = \frac{a\omega^2}{g};$$

M — масса жидкости; M_1 — масса тела без жидкости; I — момент инерции маятника без жидкости; l и l_1 соответственно расстояние от оси подвеса до центра масс полости и центра масс тела; g — ускорение силы тяжести; ϱ — плотность жидкости; β_1 и β_2 — координаты полюсов полости. Уравнение (1) — интегро-дифференциальное. Интегральный член, входящий в уравнение, определяет диссипацию механической энергии в системе, обусловленную наличием вязкой жидкости.

Чтобы выделить в уравнении (1) малый параметр, введем «безразмерное» время $\tau = \omega t$, единицей измерения для которого будет не секунда, а отнесенный к 2π период колебаний точки подвеса, т. е. $\frac{1}{\omega}$.

Уравнение (1) может быть записано в виде

$$\ddot{\Theta} + \lambda \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \int_0^\tau \ddot{\Theta}(\tau - \zeta) \frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}} + \Omega_1^2 \left(\frac{gl}{a^2\omega^2} \frac{a^2}{l^2} - \frac{a}{l} \cos \tau \right) \sin \Theta = 0. \tag{2}$$

В качестве малого параметра ε выберем отношение амплитуды колебаний точки подвеса a к длине l — расстоянию от оси подвеса до центра массы полости маятника.

Уравнение (2) примет следующий вид:

$$\ddot{\Theta}+\varepsilon\mu\int_0^\tau \ddot{\Theta}(\tau-\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}+\Omega_1^2(\alpha^2\varepsilon^2-\varepsilon\cos\tau)\sin\Theta=0 \tag{3}$$

$$\left(\Omega_1^2=\frac{M_1l_1+Ml}{I_0+Ml},\ I_0=\frac{I}{l},\ \alpha^2=\frac{gl}{a^2\omega^2},\ \mu=\lambda\sqrt{\frac{\nu l^2}{\omega a^2}},\ \nu - \text{мало}\right).$$

Из уравнения (3) видим, что оно допускает квазистатическое решение $\Theta=\pi$, соответствующее верхнему положению равновесия маятника.

Для исследования устойчивости этого решения рассмотрим малые отклонения $\Theta_1=\Theta-\pi$ от этого положения. Уравнение в вариациях для Θ_1 примет вид

$$\ddot{\Theta}_1+\varepsilon\mu\int_0^\tau \ddot{\Theta}_1(\tau-\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}-\Omega_1^2(\alpha^2\varepsilon^2-\varepsilon\cos\tau)\Theta_1=0. \tag{4}$$

Преобразуем полученное уравнение, содержащее малый параметр ε, к уравнению в стандартной форме.

Это уравнение второго порядка, как известно, эквивалентно двум уравнениям первого порядка:

$$\frac{d\Theta_1}{d\tau}=\psi;$$

$$\frac{d\psi}{d\tau}=-\varepsilon\mu\int_0^\tau\frac{d\psi(\tau-\zeta)}{d\tau}\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}+\Omega_1^2(\alpha^2\varepsilon^2-\varepsilon\cos\tau)\Theta_1, \tag{5}$$

которые посредством замены переменных

$$\psi=\varepsilon(\eta-\Omega_1^2\sin\tau\,\Theta), \tag{6}$$

где η — новая неизвестная функция, приводятся к уравнениям в стандартной форме:

$$\frac{d\Theta}{d\tau}=\varepsilon(\eta-\Omega_1^2\sin\tau\Theta);$$

$$\frac{d\eta}{d\tau}=\varepsilon\Omega_1^2(\eta-\Omega_1^2\sin\tau\Theta)\sin\tau-\varepsilon\mu\int_0^\tau\left\{\frac{d\eta(\tau-\zeta)}{d\tau}-\right.$$
$$\left.-\Omega_1^2\cos(\tau-\zeta)\,\Theta(\tau-\zeta)\right\}\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}+\varepsilon\alpha^2\Omega_1^2\Theta. \tag{7}$$

Применяя к уравнениям (7) метод усреднения, получим уравнения первого приближения в виде:

$$\frac{d\Theta_0}{d\tau}=\varepsilon\eta_0;$$

$$\frac{d\eta_0}{d\tau}=\varepsilon\Omega_1^2\left(\alpha^2-\frac{\Omega_1^2}{2}\right)\Theta_0. \tag{8}$$

Как видим из уравнений (8), условия устойчивости маятника в верхнем положении

$$\alpha^2<\frac{\Omega_1^2}{2} \tag{9}$$

или, переходя к параметрам маятника,

$$a^2\omega^2 > \frac{2gl}{\Omega_1^2} \tag{10}$$

не дают ответа на вопрос о влиянии вязкости на устойчивость.

Поэтому будем строить второе приближение. Улучшенные первые приближения, которые, как известно [2], имеют вид:

$$\begin{gathered}\Theta_1 = \Theta_0 (1 + \varepsilon\Omega_1^2 \cos\tau);\\ \eta_1 = \eta_0 - \varepsilon\Omega_1^2 \eta_0 \cos\tau + \frac{\varepsilon\Omega_1^4}{4} \sin 2\tau\Theta_0 + \frac{\varepsilon\mu\Theta_0}{\sqrt{\pi}} \int\int_0^\tau \frac{\cos(\tau-\zeta)}{\sqrt{\zeta}}\, d\zeta.\end{gathered} \tag{11}$$

Рассмотрим входящий в (11) интегральный член

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau \frac{\cos(\tau-\zeta)}{\sqrt{\zeta}}\, d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau \left\{\frac{\cos\tau\cos\zeta + \sin\tau\sin\zeta}{\sqrt{\zeta}}\right\} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\cos\tau\int_0^\tau \frac{\cos\zeta}{\sqrt{\zeta}}\, d\zeta + \sin\tau\int_0^\tau \frac{\sin\zeta}{\sqrt{\zeta}}\, d\zeta\right\} \simeq \frac{\cos\tau}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\cos\zeta}{\sqrt{\zeta}}\, d\zeta +$$

$$+ \frac{\sin\tau}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin\zeta}{\sqrt{\zeta}}\, d\zeta = \frac{\cos\tau + \sin\tau}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому улучшенное первое приближение окончательно примет вид:

$$\begin{gathered}\Theta_1 = \Theta_0 (1 + \varepsilon\Omega_1^2 \cos\tau);\\ \eta_1 = \eta_0 (1 - \varepsilon\Omega_1^2 \cos\tau) + \varepsilon\Omega_1^2 \left[\frac{\Omega_1^2 \sin 2\tau}{4} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} (\sin\tau - \cos\tau)\right]\Theta_0.\end{gathered} \tag{12}$$

Перейдем теперь к построению второго приближения. Как известно, уравнения второго приближения могут быть получены непосредственно из точных уравнений (7), если в последних ввести замену переменных по формулам (12), т. е. улучшенные первые приближения считать формулами замены переменных в точном уравнении.

Дифференцируя (12) и сравнивая с (7), получаем

$$\begin{gathered}\frac{d\Theta_0}{d\tau} = \varepsilon\left\{\eta_0 (1 - \varepsilon\Omega_1^2 \cos\tau) + \varepsilon\Omega_1^2 \left[\frac{\Omega_1^2 \sin 2\tau}{4} + \frac{\mu}{\sqrt{2}} (\sin\tau - \cos\tau)\right]\Theta_0\right\};\\ \frac{d\eta_0}{d\tau} = -\varepsilon\Omega_1^2 \frac{\cos 2\tau}{2} (1 + \varepsilon\Omega_1^2 \cos\tau)\,\Theta_0 - \varepsilon^2\Omega_1^2 \left[\frac{\sin 2\tau}{4}\Omega_1^2 + \right.\\ \left. + \frac{\mu}{\sqrt{2}} (\sin\tau - \cos\tau)\right]\eta_0 - \varepsilon^2\Omega_1^4 \eta_0 \cos\tau\sin\tau + \varepsilon^2\Omega_1^4 \left[\frac{\sin 2\tau}{4} + \right.\\ \left. + \frac{\mu}{\sqrt{2}} (\sin\tau - \cos\tau)\right]\Theta_0 \sin\tau - \varepsilon\Omega_1^4 \frac{(1-\cos 2\tau)}{2}\Theta_0 (1 + \varepsilon\Omega_1^2 \cos\tau) -\\ - \varepsilon\Omega_1^6 \frac{(1-\cos 2\tau)}{2} \cos\tau\Theta_0 - \varepsilon\mu (1 + \varepsilon\Omega_1^2 \cos\tau)\int_0^\tau \frac{d\eta_0}{d\tau} \frac{(1 - \varepsilon\Omega_1^2 \cos(\tau-\zeta))}{\sqrt{\pi\zeta}}\, d\zeta -\end{gathered} \tag{13}$$

$$-\varepsilon^2\mu\int_0^\tau\Big\{\eta_0(\tau-\zeta)\,\Omega_1^2\sin(\tau-\zeta)+\Omega_1^2\Big[\frac{\cos 2(\tau-\zeta)}{2}\Omega_1^2+\frac{\mu}{\sqrt{2}}(\cos(\tau-$$

$$-\zeta)+\sin(\tau-\zeta))\Big]\Theta_0\Big\}\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}+\varepsilon^2\mu\int_0^\tau\frac{\Omega_1^4\cos^2(\tau-\zeta)}{\sqrt{\pi\zeta}}\Theta_0(\tau-\zeta)\,d\zeta+\varepsilon\alpha^2\Omega_1^2\Theta_0+$$

$$+\varepsilon^2\alpha^2\Omega_1^4\cos\tau\,\Theta_0+\varepsilon^2\mu\int_0^\tau[\eta_0\sin(\tau-\zeta)\,\Omega_1^2-\Omega_1^4\sin^2(\tau-\zeta)\,\Theta_0]\,\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}.$$

Усредним систему уравнений (13) по явно содержащемуся времени τ, считая в процессе усреднения переменные η_0, Θ_0 постоянными. Усредненные уравнения имеют вид:

$$\frac{d\Theta_0}{d\tau}=\varepsilon\eta_0;$$

$$\frac{d\eta_0}{d\tau}=\varepsilon\left[\alpha^2-\frac{\Omega_1^2}{2}+\varepsilon\frac{\Omega_1^2\mu}{2\sqrt{2}}\right]\Omega_1^2\Theta_0-M\left\{\varepsilon\mu\int_0^\tau\frac{d\eta_0(\tau-\zeta)}{d\tau}\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}\right\}. \qquad (14)$$

Заметим, что

$$M\left\{\int_0^\tau\frac{d\eta_0(\tau-\zeta)}{d\tau}\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}\right\}=M\left\{\int_0^\delta\frac{d\eta_0}{d\tau}\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}+\int_\delta^\tau\frac{d\eta_0}{d\tau}\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}=\right.$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{d\eta_0}{d\tau}(\tau-\gamma\delta)\sqrt{\delta}+\int_\delta^\tau\frac{d\eta_0(\tau-\zeta)}{d\tau}\frac{d\zeta}{\sqrt{\pi\zeta}}\simeq-\frac{\eta_0(\tau-\zeta)}{\sqrt{\pi\zeta}}\Big|_\delta^\tau+$$

$$+\int_\delta^\tau\eta_0(\tau-\zeta)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\zeta}}\right)'d\zeta=-\frac{\eta_0(0)}{\sqrt{\pi\tau}}+\frac{\eta_0(\tau-\delta)}{\sqrt{\pi\tau}}+$$

$$\left.+\int_\delta^\tau\eta_0(\tau-\zeta)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\zeta}}\right)'d\zeta\right\}=\frac{\eta_0(\tau-\delta)}{\sqrt{\pi\delta}}-\frac{\eta_0(\tau-\delta)}{\sqrt{\pi\delta}}=0.$$

Поэтому уравнения вторых приближений окончательно принимают вид:

$$\frac{d\Theta_0}{d\tau}=\varepsilon\eta_0;$$

$$\frac{d\eta_0}{d\tau}=\varepsilon\Omega_1^2\left(\alpha^2-\frac{\Omega_1^2}{2}+\varepsilon\frac{\Omega_1^2\mu}{2\sqrt{2}}\right)\Theta_0. \qquad (15)$$

Из уравнений вторых приближений непосредственно следует, что для устойчивости маятника в верхнем положении необходимо, чтобы частота вибрации основания точки подвеса удовлетворяла условию

$$\alpha^2<\frac{\Omega_1^2}{2}\left(1-\varepsilon\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right),$$

т. е.

$$a^2\omega^2 > \frac{2gl}{\Omega_1^2\left(1 - \varepsilon\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right)}, \tag{16}$$

где μ — коэффициент, учитывающий вязкость жидкости.

Анализируя условия (10), (16), приходим к заключению, что наличие в маятнике вязкой жидкости уменьшает его устойчивость.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Краснощеков, Малые колебания твердого тела, имеющего полости, заполненные вязкой жидкостью. Численные методы решения задач математической физики, «Наука», М., 1966.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

Поступила 2.VII 1968 г.
Институт математики АН УССР