УДК 517.432.1

О K-преобразовании

М. Л. Махешвари

§ 1. Введение. Пусть

$$K[f(x)]_\gamma = \int_0^\infty f(x)\, K_\gamma(xy)\,(xy)^{\frac{1}{2}}\,dx = g(y)$$

есть K-преобразование порядка γ функции $f(x)$, где $K_\gamma(x)$ — бесселева функция, а y — вещественная или комплексная переменная. Это преобразование было введено Мейером [1]. Боас [2, 3] и Эрдейи [4] продолжили исследование этого преобразования.

Если $\gamma = \pm\frac{1}{2}$, то K-преобразование сводится к преобразованию Лапласа

$$g(p) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Целью данной работы является установление формулы, относящейся к последовательности K-преобразований.

§ 2. Теорема. *Пусть*

$$\begin{aligned} &1)\ K[f(x)]_\gamma = g(y);\\ &2)\ K\left[g\left(\frac{1}{x}\right)\right]_\gamma = \frac{\pi}{4}\Phi_1(y). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тогда

$$K\left[x^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{x^2}{2^2}\right)\right]_{2\gamma} = y^{\frac{3}{2}}\Phi_1(y^2), \tag{2.2}$$

если только $x^{\left(\frac{1}{2}\pm\gamma\right)}f(x)$, $x^{\left(\frac{1}{2}\pm\gamma\right)}g\left(\frac{1}{x}\right)=O(x^{\alpha})$ *при* $x\to 0$, $\operatorname{Re}\alpha>-1$, и $f(x)$, $g\left(\frac{1}{x}\right)$ *ограничены и абсолютно интегрируемы на* $(0,\infty)$.

Пусть, далее,

$$K\left[x^{-\frac{7}{2}}\Phi_1\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]_{2\gamma}=\frac{\pi}{2^{3/2}}\Phi_2(y); \tag{2.3}$$

$$K\left[x^{-\frac{3}{2}}\Phi_2\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right]_{2^2\gamma}=\frac{\pi}{2^{5/2}}\Phi_3(y); \tag{2.4}$$

$$K\left[x^{-\frac{3}{2}}\Phi_3\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right]_{2^3\gamma}=\frac{\pi}{2^{9/2}}\Phi_4(y); \tag{2.5}$$

. . . .

$$K\left[x^{-\frac{3}{2}}\Phi_{n-1}\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right]_{2^{n-1}\gamma}=\frac{\pi}{2^{\left(2^{n-2}+\frac{1}{2}\right)}}\Phi_n(y). \tag{2.6}$$

Тогда

$$K\left[x^{\left(2^{n-1}+\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{x^{2^n}}{2^{2^n}}\right)\right]_{2^n\gamma}=y^{-\frac{1}{2}}\Phi_n\left(\frac{y^2}{2}\right), \tag{2.7}$$

если только

$$x^{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\pm\gamma-\frac{1}{2}\right)}f(x)=O(x^{\alpha})$$

при $x\to 0$, $\operatorname{Re}\alpha>-1$, *а* $f(x)$ *ограничена и интегрируема на* $(0,\infty)$ *и* $\operatorname{Re}\gamma>-\frac{1}{2^n}$, $n>1$ *и* n — *целое число.*

Доказательство. Пусть

$$\int_0^\infty f(x)K_\gamma(xy)(xy)^{\frac{1}{2}}dx=g(y).$$

Умножив обе части на $y^{-\frac{5}{2}}K_\gamma\left(\frac{a}{y}\right)$ и проинтегрировав по y в пределах $(0,\infty)$, получим

$$\int_0^\infty y^{-\frac{5}{2}}K_\gamma\left(\frac{a}{y}\right)dy\int_0^\infty f(x)K_\gamma(xy)(xy)^{\frac{1}{2}}dx=\int_0^\infty y^{-\frac{5}{2}}K_\gamma\left(\frac{a}{y}\right)g(y)\,dy.$$

Изменив порядок интегрирования, что допустимо в условиях теоремы, вычислив y-интеграл [5, стр. 146] в левой части и применив (2.1) к правой части, получим

$$a^{-\frac{1}{2}}\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}}f(x)K_{2\gamma}[2(ax)^{\frac{1}{2}}]\,dx=\frac{1}{4}\Phi_1(a).$$

Отсюда и следует (2.2).

Из (2.2) получаем $x^{-\frac{7}{2}}\Phi_1\left(\frac{1}{x^2}\right)$ и, подставив в (2.3), имеем

$$\frac{\pi}{2^{3/2}}\Phi_2(y)=\int_0^\infty K_{2\gamma}(xy)(xy)^{\frac{1}{2}}\left[x^{-\frac{5}{2}}\int_0^\infty t^2f\left(\frac{t^2}{4}\right)K_{2\gamma}\left(\frac{t}{x}\right)dt\right]dx.$$

Изменив порядок интегрирования и вычислив x-интеграл [5, стр. 146] как ранее, получим

$$K\left[t^{\frac{5}{2}} f\left(\frac{t^4}{16}\right)\right]_{2^2\gamma} = y^{-\frac{1}{2}} \Phi_2\left(\frac{y^2}{2}\right).$$

Подставив $x^{-\frac{3}{2}} \Phi_2\left(\frac{1}{2x^2}\right)$, получим из (2.4)

$$\frac{\pi}{2^{5/2}} \Phi_3(y) = \int\limits_0^\infty K_{2^2\gamma}(xy)(xy)^{\frac{1}{2}} \left[x^{-\frac{5}{2}} \int\limits_0^\infty t^3 f\left(\frac{t^4}{2^4}\right) K_{2^2\gamma}\left(\frac{t}{x}\right) dt\right] dx.$$

Поступая как прежде, имеем

$$K\left[t^{\frac{9}{2}} f\left(\frac{t^8}{2^8}\right)\right]_{2^3\gamma} = y^{-\frac{1}{2}} \Phi_3\left(\frac{y^2}{2}\right).$$

Действуя последовательно, имеем результат (2.7).

Пусть

$$\mathrm{K}\left[x^{-\frac{3}{2}} \Phi_n\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right]_{2^n\gamma} = \frac{\pi}{2^{\left(2^{n-1}+\frac{1}{2}\right)}} \Phi_{n+1}(y). \tag{2.8}$$

Из (2.7) находим $x^{-\frac{3}{2}} \Phi_n\left(\frac{1}{2x^2}\right)$; подставляя это выражение в силу (2.8) получим

$$\frac{\pi}{2^{\left(2^{n-1}+\frac{1}{2}\right)}} \Phi_{n+1}(y) = \int\limits_0^\infty K_{2^n\gamma}(xy)(xy)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[x^{-\frac{5}{2}} \int\limits_0^\infty t^{(2^{n-1}+1)} f\left(\frac{t^{2^n}}{2^{2^n}}\right) K_{2^n\gamma}\left(\frac{t}{x}\right) dt\right] dx.$$

Изменив порядок интегрирования и вычислив x-интеграл как прежде, получим

$$K\left[t^{\left(2^n+\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{t^{2^{n+1}}}{2^{2^{n+1}}}\right)\right]_{2^{n+1}\gamma} = y^{-\frac{1}{2}} \Phi_{n+1}\left(\frac{y^2}{2}\right).$$

Таким образом, если (2.7) справедливо для n, то оно справедливо и для $(n+1)$. Но мы видели, что оно справедливо для $n = 2$. Следовательно, (2.7) справедливо для всех положительных целых n, кроме единицы.

Следствие. *Пусть* $\gamma = \frac{1}{2^{n+1}}$. *Из* (2.7) *получим преобразование Лапласа*

$$\left[x^{\left(2^{n-1}+\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{x^{2^n}}{2^{2^n}}\right)\right] = \left(\frac{2}{p\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \Phi_n\left(\frac{p^2}{2}\right)$$

при условиях, приведенных в теореме.

§ 3. Приложения. Пусть

$$f(x) = x^{\left(\mu-\frac{3}{2}\right)} {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\end{matrix} -\delta x^2\right],$$

следовательно,

$$g(y) = 2^{(\mu-2)} y^{\left(\frac{1}{2}-\mu\right)} \Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma}{2}\right) {}_{p+2}F_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \frac{\mu \pm \gamma}{2}; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q; \end{matrix} \; -\frac{4\delta}{y^2}\right],$$

где

$$\Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{\mu - \gamma}{2}\right)$$

[5, стр. 153], $p \leqslant q-1$, $\operatorname{Re}\mu > |\operatorname{Re}\gamma|$ и $\operatorname{Re} y > 0$.

Следовательно,

$$\Phi_1(y) = \frac{2^{(2\mu-1)}\Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma + 1}{2}\right)}{\pi y^{\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}} \times$$

$$\times {}_{p+4}F_q \left[\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \frac{\mu \pm \gamma}{2}, \frac{\mu \pm \gamma + 1}{2}; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q; \end{matrix} \; -\frac{2^4\delta}{y^2}\right]$$

[5, стр. 153], $p \leqslant q-3$, $\operatorname{Re}(\mu \pm \gamma) > 0$ и $\operatorname{Re} y > 0$. Применяя это к (2.2), получаем

$$K\left[x^{\left(2\mu - \frac{3}{2}\right)} {}_pF_q \left\{\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q; \end{matrix} -\frac{\delta x^4}{2^4}\right\}\right]_{2\gamma} = \frac{2^{(4\mu-4)}}{\pi y^{\left(2\mu - \frac{1}{2}\right)}} \Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma}{2}\right)\Gamma \times$$

$$\times \left(\frac{\mu \pm \gamma + 1}{2}\right) {}_{p+4}F_q \left\{\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \frac{\mu \pm \gamma}{2}, \frac{\mu \pm \gamma + 1}{2}; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q; \end{matrix} \; -\frac{2^4\delta}{y^4}\right\}, \qquad (3.1)$$

$p \leqslant q-3$, $\operatorname{Re}(\mu \pm \gamma) > 0$ и $\operatorname{Re}\ y > 0$.

Использовав (3.1), из (2.3) получаем $\Phi_2(y)$. Пусть $n = 2$. Из (2.7) получим

$$K\left[x^{\left(4\mu - \frac{7}{2}\right)} {}_pF_q \left\{\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q; \end{matrix} -\frac{\delta x^8}{2^8}\right\}\right]_{2^2\gamma} = \frac{2^{(12\mu-13)}}{\pi^3 y^{\left(4\mu - \frac{5}{2}\right)}} \Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma}{2}\right)\Gamma \times$$

$$\times \left(\frac{\mu \pm \gamma + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma}{2} \pm \frac{1}{4}\right) {}_{p+8}F_q \times$$

$$\times \left\{\begin{matrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \frac{\mu \pm \gamma}{2}, \frac{\mu \pm \gamma + 1}{2}, \frac{\mu \pm \gamma}{2} \pm \frac{1}{4}; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q; \end{matrix} \; -\frac{2^{16}\delta}{y^8}\right\}, \qquad (3.2)$$

где

$$\Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma}{2} \pm \frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma}{2} + \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu \pm \gamma}{2} - \frac{1}{4}\right)\Gamma \times$$

$$\times \left(\frac{\mu - \gamma}{2} + \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu - \gamma}{2} - \frac{1}{4}\right),$$

$$p \leqslant q-7,\ \operatorname{Re}(\mu \pm \gamma) > \frac{1}{2} \text{ и } \operatorname{Re} y > 0.$$

Аналогично, используя (3.2) и учитывая (2.4), получаем $\Phi_3(y)$. Пусть $n=3$. Из (2.7) получаем

$$K\left[x^{\left(8\mu-\frac{15}{2}\right)}{}_pF_q\left\{\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\end{matrix} -\frac{\delta x^{16}}{2^{16}}\right\}\right]_{2^3\gamma}=$$

$$=\frac{2^{(32\mu-36)}}{\pi^7 y^{\left(8\mu-\frac{13}{2}\right)}}\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}\pm\frac{1,2,3}{8}\right)\times$$

$$\times {}_{p+16}F_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \frac{\mu\pm\gamma}{2}, \frac{\mu\pm\gamma}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\mu\pm\gamma}{2}, \frac{1,2,3}{8}; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\end{matrix} -\frac{2^{48}\delta}{y^{16}}\right], \quad (3.3)$$

где

$$\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}\pm\frac{1,2,3}{8}\right)=\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}\pm\frac{1}{8}\right)\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}\pm\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}\pm\frac{3}{8}\right),$$

$$p\leqslant q-15, \quad \operatorname{Re} y>0, \quad \operatorname{Re}(\mu\pm\gamma)>\frac{1}{2}.$$

Действуя последовательно, приходим к результату

$$K\left[x^{\left(N\mu-N+\frac{1}{2}\right)}{}_pF_q\left\{\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\end{matrix} -\frac{\delta x^{2N}}{2^{2N}}\right\}\right]_{N\gamma}=\frac{2^{[(n+1)N\mu-(n+2)N+(n+1)]}}{\pi^{(N-1)}y^{\left(N\mu-N+\frac{3}{2}\right)}}\Gamma\times$$

$$\times\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{\mu\pm\gamma}{2}\pm\frac{1,2,\ldots,\left(\frac{N}{2}-1\right)}{N}\right]\times$$

$$\times {}_{p+2N}F_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \frac{\mu\pm\gamma}{2}, \frac{\mu\pm\gamma}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\mu\pm\gamma}{2}\pm\frac{1,2,3,\ldots,\left(\frac{N}{2}-1\right)}{N}; \\ \beta_1, \ldots, \beta_q;\end{matrix} -\frac{\delta N^{2N}}{y^{2N}}\right], \quad (3.4)$$

где $N=2^n$, $n>1$ и n — целое число, $\operatorname{Re}(\mu\pm\gamma)>\frac{1}{2}$, $\operatorname{Re} y>0$, $p\leqslant q-2N-1$. (3.4) можно доказать методом математической индукции, как теорему.

Частный случай. Пусть $p=0$, $q=17$, $n=3\,(N=8)$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{16}=\frac{\mu\pm\gamma}{2}, \frac{\mu\pm\gamma+1}{2}, \frac{\mu\pm\gamma}{2}\pm\frac{1,2,3}{8}$ и $\beta_{17}=a$. Из (3.4) получим

$$K\left[x^{\left(8\mu-\frac{15}{2}\right)}{}_0F_{17}\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}, \frac{\mu\pm\gamma}{2}+\frac{1}{2}, \frac{\mu\pm\gamma}{2}\pm\frac{1,2,3}{8}, a; -\frac{\delta x^{16}}{2^{16}}\right]_{2^3\gamma}=$$

$$=\frac{2^{(32\mu-36)}}{\pi^7 y^{\left(8\mu-\frac{13}{2}\right)}}\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu\pm\gamma}{2}\pm\frac{1,2,3}{8}\right)\times$$

$$\times {}_0F_1\left(a; -\frac{2^{48}\delta}{y^{16}}\right), \quad \operatorname{Re}(\mu\pm\gamma)>\frac{1}{2} \text{ и } \operatorname{Re} y>0.$$

Я весьма благодарен доктору С. Ц. Митра, заслуженному профессору математики Института технических наук Бирла, Пилани (Индия), за оказанную помощь и руководство в процессе подготовки этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. S. Meijer, Proc. Amsterdam Akad. Wet. 43, 1940, 599—608 and 702—711.
2. R. P. Boas, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 28, 1942 a, 21—24.
3. R. P. Boas, Bull. Amer. Math. Soc., 48, 1942 b, 286—294.
4. Erdelyi, Arthur, Rend. Sem. Mat. Univ. Torino, 10, 1950—1951, 217—234.
5. H. Bateman, Project, Tables of Integral Transforms, v. 2, Mc GRAW - HILL BOOK COMPANY, INC., 1954.

Поступила 5. III 1968 г.

Birla Institute of Technology Science
Pilani, Rajasthan (India)