УДК 517.1

# О периодическом решении линейного неоднородного дифференциального уравнения

*Н. И. Ронто*

В настоящей работе к решению линейного дифференциального уравнения вида (1) применяется методика, рассмотренная ранее в [1,2]. При этом выводятся в общем виде выражения для коэффициентов искомого тригонометрического полинома — решения через коэффициенты заданного уравнения.

Пусть имеется задача

$$p_0 x^{(m)}(t) + p_1 x^{(m-1)}(t) + \ldots + p_{m-1} x'(t) + p_m x(t) = f(t); \tag{1}$$

$$x^{(i)}(t) = x^{(i)}(t+T), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \tag{2}$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_m$ — постоянные коэффициенты, $f(t)$ — $T$-периодическая правая часть, заданная в виде тригонометрического полинома (или представленная своим усеченным рядом Фурье):

$$f(t) = \sum_{k=0}^{r} c_k \cos k\omega t + g_k \sin k\omega t. \tag{3}$$

Кроме того, предполагается, что мнимые числа $\pm ik\omega\ (k = 0, 1, 2, \ldots, r)$ не являются корнями характеристического многочлена уравнения

$$p_0 x^{(m)}(t) + p_1 x^{(m-1)}(t) + \ldots + p_{m-1} x'(t) + p_m x(t) = 0.$$

Приведем способ нахождения частного $T$-периодического решения уравнения (1), где $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Как известно, решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=0}^{r} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t. \tag{4}$$

Для определения неизвестных коэффициентов $a_k, b_k\ (k = 0, 1, 2, \ldots, r)$ вводится в рассмотрение вектор

$$x_{\text{Г}} = (a_0, a_1, b_1, \ldots, a_r, b_r)^t. \tag{5}$$

Ввиду того, что производные $x^{(i)}(t)\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ также являются тригонометрическими полиномами вида (4), для них также по аналогии с (5) можно записать векторы $x_{\text{Г}}^{i}\ (i = 1, 2, \ldots, m)$. Используя матрицы $\mathbf{d}^i$, которые выражают вектор $x_\Gamma^i$ через $x_\Gamma$ ($x_\Gamma^i = \mathbf{d}^i x_\Gamma$), из (1) можно получить систему алгебраических уравнений относительно вектора $x_\Gamma$:

$$p_0 \mathbf{d}^m x_\Gamma + p_1 \mathbf{d}^{m-1} x_\Gamma + \ldots + p_m \mathbf{E} x_\Gamma = f_\Gamma$$

или

$$(p_0 \mathbf{d}^m + p_1 \mathbf{d}^{m-1} + \ldots + p_m \mathbf{E})\, x_\Gamma = f_\Gamma, \tag{6}$$

где $f_\Gamma = (c_0, c_1, g_1, \ldots, c_r, g_r)^t$, $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Матрицы $\mathbf{d}^i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) имеют вид:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & \alpha_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_r & \beta_r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\beta_r & \alpha_r \end{pmatrix},$$

причем для четных $i = 2h$, $h = 1, 2, 3, \ldots$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_j = 0$, $\alpha_j = (-1)^h j^i \omega^i$, а для нечетных $i = 2h + 1$, $h = 0, 1, 2, \ldots$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_j = 0$, $\beta_j = (-1)^h \times j^i \omega^i$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Из соотношения (6)

$$x_\Gamma = (p_0 \mathbf{d}^m + p_1 \mathbf{d}^{m-1} + \ldots + p_m \mathbf{E})^{-1} \cdot f_\Gamma. \tag{8}$$

Элементы матрицы

$p_0 \mathbf{d}^m + p_1 \mathbf{d}^{m-1} + \ldots + p_m \mathbf{E} = \mathbf{R}$, имеющей вид (7), получаются из $\mathbf{L}$ при

$$\alpha_0 = p_m;$$

$$\alpha_j = \sum_{s=0}^{m} p_{m-s} (-1)^{h_s} j^s \omega^s = A_j$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r; \quad s = 2h_s, \quad h_s = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$\beta_j = \sum_{q=1}^{m} p_{m-q} (-1)^{h_q} j^q \omega^q = B_j$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r; \quad q = 2h_q + 1, \quad h_q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Обратная матрица $\mathbf{R}^{-1}$ также получается из (7), если принять

$$\alpha_0 = \frac{1}{p_m}, \quad \alpha_j = \frac{A_j}{K_j}, \quad \beta_j = -\frac{B_j}{K_j}, \tag{9}$$

где $K_j = A_j^2 + B_j^2$. Подставляя (9) в (8), имеем:

$$a_0 = \frac{c_0}{p_m};$$

$$a_j = \frac{c_j \sum\limits_{s=0}^{m} p_{m-s} (-1)^{h_s} j^s \omega^s - g_j \sum\limits_{q=1}^{m} p_{m-q} (-1)^{h_q} j^q \omega^q}{\left( \sum\limits_{s=0}^{m} p_{m-s} (-1)^{h_s} j^s \omega^s \right)^2 + \left( \sum\limits_{q=1}^{m} p_{m-q} (-1)^{h_q} j^q \omega^q \right)^2};$$

$$b_j = \frac{c_j \sum\limits_{q=1}^{m} p_{m-q} (-1)^{h_q} j^q \omega^q + g_j \sum\limits_{s=0}^{m} p_{m-s} (-1)^{h_s} j^s \omega^s}{\left( \sum\limits_{s=0}^{m} p_{m-s} (-1)^{h_s} j^s \omega^s \right)^2 + \left( \sum\limits_{q=1}^{m} p_{m-q} (-1)^{h_q} j^q \omega^q \right)^2} \tag{10}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, r; \quad s = 2h_s; \; q = 2h_q + 1; \quad h_s, h_q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Применение выражения (10) (особенно в случае больших $m$ и $r$) при решении задачи (1), (2) освобождает от довольно громоздких вычислений, связанных с подстановкой (4) в (1) и приравниванием членов при одинаковых косинусных и синусных составляющих.

Рассмотрим следующий простой пример. Пусть требуется получить $2\pi$-периодическое решение уравнения

$$\frac{1}{4} x^{(3)}(t) + \frac{1}{6} x^{(2)}(t) + \frac{5}{4} x'(t) + \frac{7}{6} x(t) =$$

$$= \frac{7}{8} + \frac{3}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t - \sin 2t - \frac{5}{3} \cos 3t + \frac{4}{3} \sin 3t.$$

Используя (10), получаем:

$$a_0 = \frac{3}{4}; \quad a_1 = 1; \quad b_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = 1;$$

$$b_2 = -1; \quad a_3 = \frac{1}{2}; \quad b_3 = \frac{1}{2},$$

т. е. частным периодическим решением приведенного примера будет

$$x(t) = \frac{3}{4} + \cos t + \frac{1}{2} \sin t + \cos 2t - \sin 2t + \frac{1}{2} \cos 3t + \frac{1}{2} \sin 3t.$$

Автор выражает благодарность В. М. Бондаренко, под руководством которого выполнена работа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бондаренко, Вопросы анализа нелинейных цепей, «Наукова думка», К., 1967.
2. Н. И. Ронто, Об итерационных методах получения вынужденных периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, сб. Методы расчета полей и цепей на ЭЦВМ, вып. 1, «Наукова думка», К., 1967.

Поступила 15.I 1968 г.
Институт кибернетики АН УССР