УДК 513.88:513.83+517.948

Введение класса p-неразложимых положительных операторов в пространстве Банаха

В. С. Тен

При изучении позитивных собственных значений $\sigma^{+}(A)$ [1] неотрицательной матрицы A основным является метод квазитреугольного разложения, суть которого заключается в следующем [2]. Конус K векторов с неотрицательными координатами допускает набор положительных проекторов P^{+} $(\{p, p_1\} \subset P^{+} \Rightarrow \{pp_1 = p_1 p, p' = I - p\} \subset P^{+})$ таких, что матрица A разложима в том и только в том случае, если существует проектор $p \in P^{+} \setminus \{0, I\}$, инвариантный относительно матрицы A в смысле

$$pAp = Ap. \tag{1}$$

В этом случае матрица A разлагается в виде

$$A = pAp + p'Ap' + pAp',$$

где pAp, $p'Ap'$ называются диагональными блоками. Продолжая дальнейшее разложение диагональных блоков, можно прийти к виду

$$A = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} A_{ij}, \tag{2}$$

где $A_{ij} = q_i A q_j$; $\{q_i\}_1^n \subset p^{+}$; $q_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$; $\sum_{i=1}^{n} q_i = I$; диагональные блоки $\{A_{ii}\}$ или неразложимые, или нулевые одномерные. После приведения к виду (2) изучение $\sigma^{+}(A)$ не представляет трудности.

Поскольку уже введено общее определение неразложимости положительного оператора в пространстве Банаха E с конусом K [3, 4], естественно попытаться получить аналог квазитреугольного разложения (2) в общем случае. На этом пути возникают следующие трудности: а) не всякий конус допускает необходимый набор проекторов P^+, например, в $C_{[0,1]}$ с конусом неотрицательных функций $P^+ = \{0,1\}$; б) возможно и такое: конус K допускает необходимый набор проекторов P^+, но оператор A, не являющийся неразложимым, может и не быть разложимым в смысле (1), например, в L_∞.

Ниже будет выделен специальный конус K и введено новое определение неразложимости положительного оператора так, чтобы можно было бы ввести квазитреугольное разложение, аналогичное (2).

Будем считать, что конус K снабжен парой $\{P^+, H\}$, где P^+ — положительные проекторы, удовлетворяющие условиям: а) если $\{p, p_1\} \subset P^+$, то $\{pp_1 = p_1p, p' = I - p\} \subset P^+$, б) если q и $q' = I - q$ — положительные проекторы и проектор q перестановочен с любым проектором $p \in P^+$, то $q \in P^+$; H — множество положительных функционалов такое, что из $x \in K$ и для любого $f \in H$ $(f, x) = 0$ следует, что $x = 0$. Если для невозрастающей последовательности элементов $\{x_i\} \subset K$ имеет место $\lim (f, x_i) = 0$ при любом $f \in H$, то будем записывать $x_i \downarrow (H)\, 0$.

Относительно конуса K введем гипотезы.

К(I). Для любого $x \in K$ существует проектор $p_x \in P^+$ такой, что $p_x x = x$, и если $p \in P^+$, $pp_x \neq 0$, то $px \neq 0$.

К(II). Существует хотя бы один элемент $x \in K$ такой, что для любого $p \in P^+ \setminus \{0\}$ $px \neq 0$. Совокупность таких элементов обозначим через K_p'.

К(III). Для любого $x \in E$ существуют такие проекторы $\{p_1, p_2\} \subset P^+$, то $\{p_1 x, -p_2 x\} \subset K$ и $p_1 + p_2 \geqslant I$.

К(IV). Если $x \in K$, $y \in p_x K$, то существует такая последовательность $\{z_i\} \subset \{z \mid 0 \leqslant z \leqslant \alpha x, \alpha < \infty\}$, что $(y - x_i) \downarrow (H) 0$.

Нормальный конус K, удовлетворяющий условиям К(I) — К(IV), назовем pm-конусом.

Пример 1. Пусть $E = L_{p\,[0,\,1]}$, $1 \leqslant p < \infty$, K — конус неотрицательных функций. Если P^+ — множество проекторов, определенных в виде

$$px(t) = \chi_t(\omega)\, x(t), \quad x(t) \in E, \quad \omega \in S,$$

и $H = \{\chi_t(\omega) \mid \omega \in S\}$, где S — класс измеримых множеств отрезка [0, 1], $\chi_t(\omega)$ — индикатор множества ω, то K — pm-конус.

Теорема 1. *Если конус* L *удовлетворяет условиям* К(I), К(III), *то* K — *миниэдральный, воспроизводящий конус.*

Определение. Пусть $\mathfrak{R}(\geqslant)$ — линейные положительные операторы

$$\mathfrak{R}_p = \{A \mid A \in \mathfrak{R}(\geqslant), \quad \lambda > \|A\| \Rightarrow (\lambda I - A)^{-1} (K \setminus \{0\}) \subseteq K_p'\},$$

$$\mathfrak{R}(H) = \{A \mid A \in \mathfrak{R}(\geqslant), \quad x_i \downarrow (H)\, 0 \Rightarrow Ax_i \downarrow (H)\, 0\}.$$

Классы $\mathfrak{R}_p$ и $\mathfrak{R}(H)$ назовем соответственно p-неразложимыми и H-непрерывными операторами. Оператор $A \in \mathfrak{R}(\geqslant)$ назовем разложимым, если существует проектор $p \in P^+ \setminus \{0, I\}$, $pAp = Ap$. Через $\mathfrak{R}_1$ обозначим класс неразложимых операторов [4].

Утверждение 1. Пусть $\hat{H} = \{\varphi \mid \varphi \in K^*, \ x_i \downarrow (H)\, 0 \Rightarrow \lim (\varphi, x_i) = 0\}$. Тогда $\mathfrak{R}(H) = \mathfrak{R}(\geqslant)$ в том и только в том случае, если $\hat{H} = K^*$.

Утверждение 2. Если конус K удовлетворяет условиям K(I), K(II), то $\mathfrak{R}_p \supseteq \mathfrak{R}_1$.

Пример 2. Пусть в $L_{p[0,1]}$ пара $\{P^+, H\}$ определена как и в примере 1. Если $p \in [1, \infty)$, то $\mathfrak{R}(H) = \mathfrak{R}(\geqslant)$, $\mathfrak{R}_p = \mathfrak{R}_1$; если $p = \infty$, то $\mathfrak{R}(H) \subset \mathfrak{R}(\geqslant)$, $\mathfrak{R}_p \supset \mathfrak{R}_1$.

Теорема 2. *Пусть K — pm-конус, оператор A p-неразложим и H-непрерывен, спектральный радиус $r(A)$ — полюс резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}$. Тогда:*

а) $r(A) > 0$, *$r(A)$ — простое собственное число*, $\dim\{x \mid r(A)x = Ax\} = 1$;

б) *если $x \in E$, $r(A)x = Ax$, то $x \in K'_p \cup (-K'_p)$;* (3)

в) $\underline{\gamma}(A) = r(A) = \overline{\gamma}(A)$,

где

$$\overline{\gamma}(A) = \sup\{\lambda \mid \exists x \in K \setminus \{0\} : \lambda x \leqslant Ax\};$$

$$\underline{\gamma}(A) = \inf\{\lambda \mid \exists x \in K \setminus \{0\} : \lambda x \geqslant Ax\}.$$

Замечание. Пункты а), б) — аналог теоремы Фробениуса [2] (см. также [3]); пункт в) — аналог теоремы минимакса [5] (см. также [6]).

Возможность квазитреугольного разложения открывает следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть конус K удовлетворяет условиям K(I), K(II), K(IV). Тогда всякий H-непрерывный оператор или разложим, или p-неразложим.

Пусть $P_A^+ = \{p \mid p \in P^+,\ p'Ap = 0\}$. Оператор A назовем конечноразложимым, если множество P_A^+ конечно.

Утверждение 4. Пусть конус K удовлетворяет условиям K(I), K(II), K(IV), оператор A конечноразложим и H-непрерывен. Тогда существуют $\{q_i\}_1^n \subset P^+$ такие, что 1) $q_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$; 2) $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = I$; 3) $\sum\limits_{i=1}^{k} q_i \in P_A^+$, $k = \overline{1, n}$; 4) если $p \in P_A^+ \setminus \{0\}$, то $p = \sum q_{k_i}$; 5) в квазитреугольном разложении $A = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{j} A_{ij}$, где $A_{ij} = q_i A q_j$, диагональные элементы $\{A_{ii}\}$ или p-неразложимые, или $A_{ii} = 0$ и $\dim(q_i E) = 1$.

Введем обозначения $\omega_{i_0} = \{j \mid \exists i_0 > i_1 > \ldots > i_k > j :\ A_{j i_k} \neq 0,\ A_{i_l i_{l-1}} \neq 0,\ l = \overline{1, k}\}$, $\omega_0 = \{i \mid \omega_i = \varnothing\}$, $\omega = \{i \mid \omega_i \neq \varnothing,\ j \in \omega_i \Rightarrow r(A_{jj}) < r(A_{ii})\}$.

Теорема 3. *Пусть K — pm-конус, оператор A конечноразложим, H-непрерывен, и если $A_{ii} \neq 0$, то $r(A_{ii})$ — полюс $(\lambda I - A_{ii})^{-1}$ в $q_i E$.* Тогда:

а) *класс позитивных собственных значений $\sigma^+(A)$ совпадает со множеством $\{r(A_{ii}) \mid i \in \omega \cup \omega_0\}$;*

б) $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} r(A_{ii}) \leqslant \underline{\gamma}(A) = \min\limits_{i \in \omega_0} r(A_{ii}) \leqslant \max \sigma^+(A) = r(A) = \overline{\gamma}(A)$;

в) *равенство* (3) *имеет место в том и только в том случае, когда* $\omega = \varnothing$ и $\min\limits_{i \in \omega_0} r(A_{ii}) = \max\limits_{i \in \omega_0} r(A_{ii})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, М., 1962.
2. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Физматгиз, М., 1967.
3. I. Sawashima, Spectral properties of some positive operators, Nat. Sci. Rept. Ochanomizu Univ., 15, 2, 1964, 53—64.

4. В. Я. Стеценко, Критерии неразложимости линейных операторов, УМН, т. 21, № 5 (131), 1966.
5. И. Марек, Обобщенный принцип минимакса для неразложимых операторов, ДАН СССР, т. 176, № 4, 1967.
6. S. Karlin, Positive operators, J. Math. Mech., 8, 1959, 907—937.

Поступила 14.VIII 1968 г.
Донецкий вычислительный центр АН УССР