УДК 512.831

Приведение определенного вида матрицы высокого порядка к квазидиагональному виду

М. Я. Бородянский, В. Д. Шумейко

Рассматриваемая матрица получена как обобщение матрицы однородной системы линейных уравнений, соответствующих моменту критического состояния пространственных рамных конструкций.

Эта матрица $4n$-го порядка может быть представлена в виде блочной матрицы 4-го порядка

$$N = \begin{Vmatrix} (A) & (B') & (A) & (C') \\ (B) & (A) & (B) & (D') \\ (A) & (B') & (A) & (C') \\ (C) & (D) & (C) & (A) \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

блоками которой служат квадратные матрицы n-го порядка, общий вид которых можно записать в виде

$$Q = \| q_{i,k} \|, \quad i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n; \quad k = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n$$

$$(Q = A, B, C, D;\ q_{i,k} = a_{i,k},\ b_{i,k},\ c_{i,k},\ d_{i,k}). \tag{2}$$

Элементы (2) обладают общим свойством:

$$q_{i,k} = q_{i+m,k+m}, \tag{3}$$

где m — любое целое число.

При этом в тех случаях, когда индекс $i+m$ или $k+m$ становится больше n или отрицательным, то будем считать, что:

$$i + m = j;$$

$$1 \leqslant j \leqslant n, \tag{4}$$

где $j \equiv i + m \pmod n$.

Каждая из матриц A, B, C, D, кроме общего свойства (3), отличается некоторой особенностью, а именно:

Матрица A

$$A = \| a_{i,k} \|; \tag{5}$$

$$a_{i,i+m} = a_{i,i-m}. \tag{6}$$

Из (3) и (6) следует:

$$a_{i,k} = a_{k,i}. \tag{7}$$

Матрица B

$$B = \| b_{i,k} \|; \tag{8}$$

$$b_{i,i+m} = -b_{i,i-m}. \tag{9}$$

Из (3) и (9) вытекает, что

$$b_{i,k} = -b_{k,i}, \tag{10}$$

т. е. матрица B — кососимметрическая. При n-четном, полагая $m = \frac{n}{2}$ и учитывая (4), получим:

$$b_{i,i+\frac{n}{2}} = -b_{i,i-\frac{n}{2}} = 0. \tag{11}$$

Матрица C

$$C = \| c_{i,k} \|; \tag{12}$$

$$c_{i,i+m} = c_{i,i-m-1}. \tag{13}$$

В частности, при $m = 0$ из (13) получим

$$c_{i,i} = c_{i,i-1}. \tag{14}$$

Матрица D

$$D = \| d_{i,k} \|; \tag{15}$$

$$d_{i,i} = -d_{i,i-1}; \tag{16}$$

$$d_{i,i+m} = -d_{i,i-m-1}. \tag{17}$$

Матрицы A, B, C, D, как показано в [1], приводятся к диагональному виду при помощи неособенных матриц V_1, V_2, V_3, общий вид которых будет

$$V = \| v_{i,k} \|, \tag{18}$$

где

$$v_{i,k} = (-1)^{i(k-1)} \quad \text{для } i = 1,\ 2,$$

$$v_{i,k} = \sin \frac{j\pi}{2n} \quad \text{для } i = 3,\ 4,\ 5, \ldots, n,$$

а j принимает для частных случаев матрицы V значения, приведенные в таблице.

Частный вид матрицы V	Значения j	
	при i нечетном; $i=2\lambda-1$	при i четном; $i=2\lambda$
V_1	$4(\lambda-1)(k-1)$	$n-4(\lambda-1)(k-1)$
V_2	$n-4(\lambda-1)(k-1)$	$-4(\lambda-1)(k-1)$
V_3	$2(\lambda-1)(2k-3)$	$n-2(\lambda-1)(2k-3)$

В таблице величина λ означает номер пары строк. При нечетном n первая строка выпадает, а вторую строку условно считают первой парой.

При принятых обозначениях

$$\begin{gathered} V_1AV_1' = V_2AV_2' = P, \\ V_2BV_1' = R, \\ V_3CV_1' = S, \\ V_3DV_2' = T, \end{gathered} \tag{19}$$

где P, R, S, T — матрицы A, B, C, D, приведенные к диагональному виду.

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} V_1 B' V_2' &= R; \\ V_1 C' V_3' &= S, \\ V_2 D' V_3' &= T. \end{aligned} \tag{20}$$

Блочную матрицу N преобразуем при помощи вспомогательной блочной матрицы

$$W = \left\| \begin{matrix} (V_1) & & & \\ & (V_2) & & \\ & & (V_1) & \\ & & & (V_3) \end{matrix} \right\| \tag{21}$$

следующим образом:

$$M = WNW'. \tag{22}$$

Как следует из (19), (20) (см. также [1, 2]), матрица M имеет вид

$$M = \left\| \begin{matrix} (P) & (R) & (P) & (S) \\ (R) & (P) & (R) & (T) \\ (P) & (R) & (P) & (S) \\ (S) & (T) & (S) & (P) \end{matrix} \right\|. \tag{23}$$

Рассмотрим неособенную матрицу L

$$L = \| l_{i,k} \| \quad (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots, 4n;\ k = 1,\ 2,\ 3, \ldots, 4n), \tag{24}$$

где

$$\left. \begin{aligned} l_{4j+1, j+1} &= 1, \\ l_{4j+2, j+n+1} &= 1, \\ l_{4j+3, j+2n+1} &= 1, \\ l_{4j+4, j+3n+1} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (j = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots, n-1), \tag{25}$$

остальные $l_{i,k} = 0$.

Очевидно, что матрица L, будучи примененной слева к какой-либо матрице (например, LM), вызовет в ней определенную перестановку строк. Матрица же L', примененная справа (например, $(LM)\, L'$), вызовет перестановку столбцов.

Нетрудно проверить, что матрица

$$F = LML' \tag{26}$$

является квазидиагональной матрицей $4n$-го порядка с n блоками 4-го порядка:

$$F = \left\| \begin{matrix} (Z_0) & & & & & & \\ & (Z_1) & & & & & \\ & & (Z_2) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & (Z_k) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & (Z_{n-2}) & \\ & & & & & & (Z_{n-1}) \end{matrix} \right\|. \tag{26'}$$

Как это следует из [1], между блоками (26′) имеет место равенство

$$Z_k = Z_{k+1} \quad (k = 2\,(\lambda - 1) \quad \text{для } \lambda = 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots), \tag{27}$$

$Z_0 \neq Z_1$, причем Z_0 при нечетном n отсутствует. Вид блоков (26′) следующий:

$$Z_0 = \begin{Vmatrix} p_0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & p_0 & 0 & t_0 \\ p_0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & t_0 & 0 & p_0 \end{Vmatrix}; \qquad (28)$$

$$Z_1 = \begin{Vmatrix} p_1 & 0 & p_1 & s_1 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & p_1 & s_1 \\ s_1 & 0 & s_1 & p_1 \end{Vmatrix}; \qquad (29)$$

$$z_k = \begin{Vmatrix} p_\lambda & r_\lambda & p_\lambda & s_\lambda \\ r_\lambda & p_\lambda & r_\lambda & t_\lambda \\ p_\lambda & r_\lambda & p_\lambda & s_\lambda \\ s_\lambda & t_\lambda & s_\lambda & p_\lambda \end{Vmatrix} \quad (k = 2(\lambda - 1),\ \lambda = 2, 3, 4, 5 \ldots), \qquad (30)$$

е

$$p_0 = n(a_1 - 2a_2 + 2a_3 - 2a_4 + \ldots);$$

$$p_1 = n(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \ldots);$$

$$p_\lambda = \frac{n}{2}\left[a_1 + 2a_2 \cos(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + 2a_3 \cos 2(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + \ldots\right];$$

$$= \frac{n}{2}\left[2b_2 \sin(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + 2b_3 \sin 2(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + 2b_4 \sin 3(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + \ldots\right];$$

$$s_1 = 2n(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots);$$

$$s_\lambda = \frac{n}{2}\left[2c_1 \cos\frac{1}{2}(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + 2c_2 \cos\frac{3}{2}(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + \right.$$

$$\left. + 2c_3 \cos\frac{5}{2}(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + \ldots\right];$$

$$t_0 = 2n(d_1 - d_2 + d_3 - d_4 + \ldots);$$

$$t_\lambda = -\frac{n}{2}\left[2d_1 \sin\frac{1}{2}(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + 2d_2 \sin\frac{3}{2}(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + \right.$$

$$\left. + 2d_3 \sin\frac{5}{2}(\lambda - 1)\frac{2\pi}{n} + \ldots\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

М. Я. Бородянский, Разложение некоторых определителей, имеющих применение в технике, Труды КТИПП, вып. 15, Изд-во КГУ, 1955.

Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.

Поступила 5.VI 1967 г.

Киевский технологический институт
пищевой промышленности