УДК 519.2

Об определении среднего значения устойчивого процесса с независимыми приращениями

Ву Тхе Хыу

Вопросы определения неизвестных параметров случайных процессов с независимыми приращениями рассматривались в [1] для процесса Пауссона, нормального и некоторых других конкретных процессов. Эмпирические аналоги характеристик общего однородного случайного процесса с независимыми приращениями рассматривались в [2].

В настоящей заметке рассматривается определение среднего устойчивого процесса, для которого характеристическая функция имеет следующий вид:

$$\varphi_t(z) = Me^{i\xi(t)} = \exp\{t\,[i\gamma z - c\,|\,z\,|^{\alpha}]\}, \tag{1}$$

где $c>0$; $0<\alpha<1$ и γ — оцениваемый неизвестный параметр.

Предполагается, что процесс наблюдается на $[0, T]$ в дискретные моменты времени $t_k = \frac{kT}{N}$. Здесь строится оценка для γ, основанная на урезанных значениях приращений процесса

$$\gamma_N^{\delta} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N}\psi_\delta\,(\eta_k), \tag{2}$$

где

$$\psi_\delta(x) = \begin{cases} x & \text{при } |\,x\,| \leqslant \delta, \\ 0 & \text{при } |\,x\,| > \delta; \end{cases}$$

$$\eta_k = \xi\,(t_k) - \xi\,(t_{k-1}), \quad k = 1,\ 2, \ldots, N.$$

Ищется асимптотическое поведение (при $N \to \infty$) первых двух моментов указанной оценки. Чтобы подсчитать эти моменты, заметим, что случайные величины η_k независимые и одинаково распределенные со следующей характеристической функцией:

$$f(z) = Me^{iz\eta_k} = \exp\left\{\frac{T}{N}\,[i\gamma\,z - c\,|\,z\,|^{\alpha}]\right\}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) мы можем находить математическое ожидание γ_N^{δ}:

$$M\gamma_N^{\delta} = \frac{N}{2\pi T}\int_{-\delta}^{\delta} ve^{-ivz}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{T}{N}[i\gamma z - c|z|^{\alpha}]}dzdv.$$

Обозначая через A и B соответственно $\frac{cT}{N}$ и $\frac{\gamma T}{N}$ и полагая $u = v - B$, имеем:

$$M\gamma_N^{\delta} = \frac{N}{2\pi T}\int_{-\delta-B}^{\delta-B}(u+B)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-A|z|^{\alpha}}\cos uzdzdu =$$

$$= \frac{NA^{1/\alpha}}{T}\int_{(-\delta-B)A^{-1/\alpha}}^{(\delta-B)A^{-1/\alpha}} xp\,(x)\,dx + \gamma\int_{(-\delta-B)A^{-1/\alpha}}^{(\delta-B)A^{-1/\alpha}} p\,(x)\,dx, \tag{4}$$

где $x = uA^{-1/\alpha}$ и

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|s|^\alpha} \cos xs ds.$$

Вычисляем интегралы в правой части (4):

$$\frac{NA^{1/\alpha}}{T} \int_{(-\delta-B)A^{-1/\alpha}}^{(\delta-B)A^{-1/\alpha}} xp(x)\,dx = \frac{NA^{1/\alpha}}{2\pi T} \left\{ \frac{a_1}{1-\alpha} \left[\left(\frac{\delta - B}{A^{1/\alpha}} \right)^{1-\alpha} - \left(\frac{\delta + B}{A^{1/\alpha}} \right)^{1-\alpha} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{a_2}{1-2\alpha} \left[\left(\frac{\delta - B}{A^{1/\alpha}} \right)^{1-2\alpha} - \left(\frac{\delta + B}{A^{1/\alpha}} \right)^{1-2\alpha} \right] \right\} \{1 + o(1)\} =$$

$$= \left\{ \frac{ca_1\delta^{1-\alpha}}{\pi(1-\alpha)} \left[\left(1 - \frac{B}{\delta} \right)^{1-\alpha} - \left(1 + \frac{B}{\delta} \right)^{1-\alpha} \right] - \frac{NA^2 a_2 \delta^{1-2\alpha}}{(1-2\alpha)\pi T} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\left(1 - \frac{B}{\delta} \right)^{1-2\alpha} - \left(1 + \frac{B}{\delta} \right)^{1-2\alpha} \right] \right\} \{1 + o(1)\}$$

(здесь использовалось асимптотическое разложение для

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|s|^\alpha} \cos xs ds = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n x^{-n\alpha-1}, \tag{5}$$

где $a_n = \dfrac{\sin \dfrac{n\pi\alpha}{2} \Gamma(n\alpha + 1)}{n!}$ см., например, [3]).

Выбирая достаточно большое N так, чтобы $\frac{B}{\delta} \ll 1$, мы можем разложить $\left(1 - \frac{B}{\delta}\right)^{1-n\alpha}$ и $\left(1 + \frac{B}{\delta}\right)^{1-n\alpha}$ в ряд Тейлора и, следовательно,

$$\frac{NA^{1/\alpha}}{T} \int_{(-\delta-B)A^{-1/\alpha}}^{(\delta-B)A^{-1/\alpha}} xp(x)dx = \left\{ \frac{-2ca_1\gamma T}{\pi N \delta^{\alpha}} - \frac{\alpha(\alpha+1)\gamma^3 T^3 c a_1}{3\pi N^3 \delta^{2+\alpha}} + \frac{(cT)^2 a_2 \gamma}{\pi N^2 \delta^{2\alpha}} \right\} \times$$

$$\times \{1 + o(1)\}. \tag{6}$$

Аналогично мы имеем

$$\gamma \int_{(-\delta-B)A^{-1/\alpha}}^{(\delta-B)A^{-1/\alpha}} p(x)\,dx = \gamma \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx - \int_{-\infty}^{(-\delta-B)A^{-1/\alpha}} p(x)dx - \int_{(\delta-B)A^{-1/\alpha}}^{\infty} p(x)dx \right] =$$

$$= \gamma \left[1 - \frac{2cTa_1}{\pi\alpha N\delta^\alpha} + \frac{2(cT)^2 a_2}{\pi\alpha N^2 \delta^{2\alpha}} \right] [1 + o(1)]. \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (4), мы имеем математическое ожидание

$$M\gamma_N^\delta = \gamma \left[1 - \frac{2(1+\alpha)cTa_1}{\alpha\pi N\delta^\alpha} (1 + o(1)) \right]. \tag{8}$$

Аналогичными вычислениями мы находим дисперсию γ_N^δ:

$$D\gamma_N^\delta = \frac{NA^{2/\alpha}}{T^2}\int\limits_{(-\delta-B)A^{-1/\alpha}}^{(\delta-B)A^{-1/\alpha}} x^2 p(x)\,dx + \frac{2\gamma A^{1/\alpha}}{T}\int\limits_{(-\delta-B)A^{-1/\alpha}}^{(\delta-B)A^{-1/\alpha}} xp(x)\,dx +$$

$$+ \frac{\gamma^2}{N}\int\limits_{(-\delta-B)A^{-1/\alpha}}^{(\delta-B)A^{-1/\alpha}} p(x)\,dx - \frac{[M\gamma_N^\delta]^2}{N}; \qquad (9)$$

$$\frac{NA^{2/\alpha}}{T^2}\int\limits_{(-\delta-B)A^{-1/\alpha}}^{(\delta-B)A^{-1/\alpha}} x^2 p(x)\,dx \approx \frac{2ca_1\delta^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\pi T} - \frac{c^2a_2\delta^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\pi N^2\delta^{2\alpha}}. \qquad (10)$$

Пользуясь (6) — (10), получаем

$$D\gamma_N^\delta = \left[\frac{2ca_1\delta^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\pi T} - \frac{2c^2a_2\delta^{2-\alpha}}{(1-\alpha)\pi N\delta^\alpha}\right][1+o(1)]. \qquad (11)$$

Теперь строим новую оценку для среднего значения процесса (1)

$$\tilde{\gamma}_N^\delta = \frac{1}{1-\dfrac{2(1+\alpha)cTa_1}{\alpha\pi N\delta^\alpha}}\gamma_N^\delta, \qquad (12)$$

тогда

$$M\tilde{\gamma}_N^\delta = \gamma + O(N^{-2}\delta^{-2\alpha});$$

$$D\tilde{\gamma}_N^\delta = \frac{2ca_1\delta^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\pi T\left[1-\dfrac{2(1+\alpha)cTa_1}{\alpha\pi N\delta^\alpha}\right]^2}[1+o(1)]$$

или для простоты записи

$$D\tilde{\gamma}_N^\delta = \frac{b_1\delta^{2-\alpha}}{\left[1-\dfrac{b_2}{N\delta^\alpha}\right]^2}[1+o(1)], \qquad (13)$$

где $b_1 = \dfrac{2ca_1}{(2-\alpha)\pi T}$ и $b_2 = \dfrac{2(1+\alpha)cTa_1}{\alpha\pi}$.

Желательно выбирать зависимость δ от N так, чтобы $D\tilde{\gamma}_N^\delta$ как можно быстрее стремилось к нулю, когда N стремится к бесконечности.

Для этого рассмотрим главный член $D\tilde{\gamma}_N^\delta$:

$$f(\delta) = \frac{b_1\delta^{2-\alpha}}{\left[1-\dfrac{b_2}{N\delta^\alpha}\right]^2}.$$

При фиксированном N, $f(\delta)$ — непрерывная функция от δ, которая определена при $\delta \neq 0$ и $N\delta^\alpha \neq b_2$. Она имеет производную:

$$f'(\delta) = \frac{b_1\delta^{1-2\alpha}[(2-\alpha)N\delta^\alpha - b_2(2+\alpha)]}{N[1-b_2N^{-1}\delta^{-\alpha}]^3}.$$

Отсюда естественно выбирать зависимость δ от N так, чтобы $N\delta$ как можно медленнее стремилось к бесконечности, например $N\delta = \log N$, $N\delta = \log \log N$ и т. д.

Докажем теперь асимптотическую нормальность γ_N^δ, т. е. при любом вещественном x

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\frac{\gamma_N^\delta - M\gamma_N^\delta}{\sqrt{D\gamma_N^\delta}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{14}$$

Полагаем

$$\zeta_{\delta k} = \frac{\psi_\delta(\eta_k) - M\psi_\delta(\eta_k)}{T\sqrt{D\gamma_N^\delta}},$$

тогда

$$\frac{\gamma_N^\delta - M\gamma_N^\delta}{\sqrt{D\gamma_N^\delta}} = \zeta_{\delta 1} + \zeta_{\delta 2} + \ldots + \zeta_{\delta N}, \tag{15}$$

где $N = 1, 2, \ldots$; $\delta = \delta(N) \to 0$ при $N \to \infty$. Мы имеем дело с последовательностью сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. Для доказательства сходимости к нормальному закону сумм (15) нам достаточно доказать выполнение условия Линдберга: для всех $\tau > 0$ имеет место

$$N \int_{|x|>\tau} x^2 dF_{\delta k}(x) \to 0,$$

где $F_{\delta k}$ — функция распределения $\zeta_{\delta k}$ (см., например, [4]).

В самом деле, из (8) и (11) имеем

$$|\zeta_{\delta k}| \leqslant \left|\frac{\psi_\delta(\eta_k)}{T\sqrt{D\gamma_N^\delta}}\right| + \left|\frac{M\psi_\delta(\eta_k)}{T\sqrt{D\gamma_N^\delta}}\right| \leqslant k_1\delta^{\alpha/2} + k_2 N^{-1}\delta^{-1+\frac{\alpha}{2}},$$

где k_1, k_2 — некоторые константы. Отсюда вытекает, что при любом $\tau > 0$ можно выбрать N_0 так, что для всех $N > N_0$ будет $P\{|\zeta_{\delta k}| < \tau\} = 1$ или $P\{|\zeta_{\delta k}| > \tau\} = 0$. Этим доказано требуемое.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. В. Скороходу за постановку задачи и постоянное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Dvoretzky, J. Kiefer, J. Wolfowitz, Sequential decision for processes with continous time parameter, Ann. Math. Stat., N 3, 1953.
2. А. В. Скороход, Некоторые вопросы статистики однородного процесса с независимыми приращениями, Вест. КГУ, № 2, 1959.
3. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, «Наука», М., 1965.
4. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М., 1949.

Поступила 20.VI 1968 г.

Киевский государственный университет