УДК 517.53

Об одном критерии аналитичности функции комплексного переменного

М. М. Тар

Настоящая статья посвящается доказательству следующего предложения.

Теорема. *Пусть $w = f(z)$ — произвольное непрерывное отображение области D. Если в каждой точке $z \in D$, исключая не более чем счетное их множество A, существует*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta f}{\Delta z},$$

то $f(z)$ — аналитическая функция всюду в области D.

Сначала докажем одну лемму.

Лемма. *Пусть $w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — непрерывная в области D однолистная функция. Если в точке $z_0 \in D$ существует*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y}{|\Delta z|^2}, \tag{1}$$

а обратная функция $z = z(w)$ в точке $w_0 = w(z_0)$ имеет полный дифференциал, то $z(w)$ является моногенной в точке w_0.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда в силу существования полного дифференциала [1, стр.21] функции $z(w) = x(u, v) + iy(u, v)$ в точке w_0 ее множество моногенности $\mathfrak{M}_{w_0}$ заполняет окружность

$$\omega(\alpha) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = z_{w_0} + z_{\overline{w}_0} e^{-2i\alpha} \tag{2}$$

с центром в точке $\omega = z_{w_0}$, радиуса $|z_{\overline{w}_0}|$, где

$$\alpha = \lim \arg \Delta w \ (0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi);$$

$$z_{w_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}\right);$$

$$z_{\overline{w}_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Из условия (1) следует, что множество моногенности $\mathfrak{M}_{z_0}$ функции $w(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ лежит на вертикальной прямой и существуют конечные частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{3}$$

Так как в силу однолистности $w(z)$ $\mathfrak{M}_{w_0}$ получается из $\mathfrak{M}_{z_0}$ преобразованием $\omega = \frac{1}{\zeta}$, то, очевидно, $0 \in \mathfrak{M}_{w_0}$, $\operatorname{Im} z_{w_0} = 0$, т. е.

$$|z_{w_0}|^2 = |z_{\overline{w}_0}|^2$$

или

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{4}$$

и

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u}. \tag{5}$$

Отсюда видно, что можно предположить $\frac{\partial x}{\partial u}$ и $\frac{\partial y}{\partial v}$ не равными одновременно нулю, так как в противном случае имели бы: $z'(w_0) = 0$. Пусть для определенности $\frac{\partial y}{\partial v} \neq 0$. Тогда, учитывая (4) и (5), нетрудно проверить, что для угла

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\partial y}{\partial u}\middle|\frac{\partial y}{\partial v}\right) \tag{6}$$

имеет место равенство:

$$\omega(\alpha_0) = z_{w_0} + z_{\overline{w}_0} e^{-2i\alpha_0} = 0, \tag{7}$$

которое означает, что при $w \to w_0$ и $\arg(w - w_0) \to \alpha_0$ имеем:

$$\frac{z - z_0}{w - w_0} \to 0. \tag{8}$$

(В случае $\frac{\partial y}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial x}{\partial u} \neq 0$ вместо (6) полагаем

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\partial x}{\partial u}\middle|\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

и далее рассуждаем аналогично). В силу существования полного дифференциала функции $y = y(u, v)$ множество точек E' на плоскости w, удовлетворяющих уравнению $y(u, v) = y_0$, в качестве контингенции в точке $w_0 = u_0 + iv_0$ имеет касательную, образующую с осью ou угол α_0. Поэтому при $w \in E'$ имеет место (8) (так как $\arg(w - w_0) \to \alpha_0$).

Пусть E — прообраз E' на плоскости z. Так как множество E' — линия уровня функции $y = y(u, v)$ в точке w_0, то, очевидно, E является подмножеством прямой $y = y_0$. В силу однолистности функции $w(z)$ найдется прямолинейная окрестность точки z_0 (при $y = y_0$), входящая в E. Поэтому из (8) следует

$$\lim_{x \to x_0} \frac{w - w_0}{x - x_0} = \infty. \tag{9}$$

Но так как при $w \in E'$

$$\lim_{w \to w_0} \frac{v - v_0}{u - u_0} = \operatorname{tg}\alpha_0,$$

то из (9) получаем

$$\left.\frac{\partial u}{dx}\right|_{z=z_0} = \infty,$$

что противоречит существованию конечных частных производных (3).

Лемма доказана. Перейдем к доказательству теоремы.

Из существования

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

следует, что множество моногенности $\mathfrak{M}_z (z \in D \setminus A)$ лежит на вертикальной прямой

$$\operatorname{Re} \zeta = \xi = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

плоскости ζ $(\zeta = \xi + i\eta)$.

Обозначим через E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ множество точек $z \in D \setminus A$, удовлетворяющих условию

$$\left| \operatorname{Re} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| \leqslant n \text{ при } |\Delta z| < \frac{1}{n}.$$

В силу непрерывности функции $f(z)$ каждое из множеств E_n замкнуто (в D).

Очевидно, $D \setminus A = \bigcup\limits_n E_n$. Так как множество $D \setminus A$—второй категории, то найдется фиксированное значение $n = n_1$ такое, что соответствующее ему замкнутое множество E_{n_1} будет всюду плотно на некоторой порции $D_1 \subset D$, т. е. $E_{n_1} = \overline{D}_1$.

Таким образом, при $|\Delta z| < \dfrac{1}{n_1}$ в каждой точке $z \in D_1$ будем иметь:

$$\left| \operatorname{Re} \frac{\Delta f}{\Delta z} \right| \leqslant n_1. \tag{10}$$

На порции D_1 рассмотрим функцию

$$w = w(z) = f(z) + 2n_1 z.$$

Очевидно, для $w(z)$ множество моногенности $\mathfrak{M}_z$ $(z \in D_1 \setminus A)$ лежит на прямой $\xi = \text{const}$, $n_1 \leqslant \xi \leqslant 3n_1$. Обозначим через Q_m множество точек $z \in D_1 \setminus A$, удовлетворяющих условию

$$\left| \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z} \right| \geqslant \frac{n_1}{2} \text{ при } |\Delta z| < \frac{1}{m}.$$

В силу равенства $D_1 \setminus A = \bigcup\limits_m Q_m$ и замкнутости кождого из множеств Q_m $(m = 1, 2, \ldots)$, аналогично, как и выше, найдется значение $m = m_1$ и соответственно—порция $D_2 \subset D_1$ такая, что при $|z' - z| < \dfrac{1}{m_1}$ будем иметь:

$$\left| \frac{w(z') - w(z)}{z' - z} \right| \geqslant \frac{n_1}{2} \; (z', z \in D_1).$$

Отсюда следует, что в любом круге $K \subset D_2$ диаметра $\dfrac{1}{m_1}$ функция $w(z)$ является однолистной.

Пусть K' — образ K. В силу однолистности функции $w(z)$ в K K' — также область (на плоскости w).

Покажем, что функция $z(w)$ (обратная к $w(z)$) почти всюду моногенна в области K'. В самом деле, так как в случае однолистной функции $z = z(w)$, множество моногенности $\mathfrak{M}_w$ получается из соответствующего $\mathfrak{M}_z$ преобразованием $\omega = \dfrac{1}{\zeta}$ (как уже отмечалось выше), то из (10) следует, что в K' функция $z(w)$ удовлетворяет условию Липшица.

По теореме В. В. Степанова [2] функция $z(w)$ имеет полный дифференциал в точках множества полной меры $Q \subset K'$, причем можно считать

$$Q \cap A' = \varnothing \quad (A' = w(A)).$$

На основании леммы в точках $w \in Q$ функция $z(w)$ является моногенной.

Аналогично доказательству леммы 11 [1], легко убедиться в справедливости утверждения: функция $z = z(w)$, почти всюду моногенная и удовлетворяющая условию Липшица в области K', является аналитической всюду в K'. Следовательно, обратная ей функция $w(z) = f(z) + 2n_1 z$, и значит $f(z)$ тоже аналитична в круге K. Так как для произвольной области $G \subset D \setminus \overline{K}$ мы можем повторить предыдущие рассуждения, то отсюда следует, что функция $f(z)$ аналитична на всюду плотном открытом множестве в области D.

Докажем теперь, что $f(z)$ аналитична всюду в области D.

Предположим противное: пусть найдется нигде не плотное совершенное множество P, в каждой точке которого функция $f(z)$ не является аналитической.

Так как замкнутое множество P — второй категории (в себе), то совершенно аналогично, как и выше, выделим порцию $P_1 \subset P$ и находим постоянную $a_1 > 0$ такую, что функция $w_1(z) = f(z) + 2a_1 z$ будет однолистной при $z \in P$; причем для

$$w_1(z),\ a_1 \leqslant \operatorname{Re} \mathfrak{M}_z \leqslant 3a_1 \ (z \in P_1).$$

На основании теоремы 9 [1] функцию $w_1(z)$ можно считать однолистной в области D_3, содержащей некоторое множество

$$P_2 \subset P_1, \quad (P \setminus P_2) \cap D_3 = \varnothing.$$

Применив лемму, аналогично, как и раньше, доказываем, что функция $z = z_1(w)$ (обратная к $w_1(z)$) является аналитической всюду в области $D_3' = w_1(D_3)$, откуда следует аналитичность функции $f(z)$ всюду в области D_3, что противоречит определению множества $P \subset D$.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $w = f(z)$ — произвольное непрерывное отображение области D. Если в каждой точке $z \in D$, исключая не более чем счетное их множество A, существует один из пределов:*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta f}{\Delta z},$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta f}{\Delta z},$$

то $f(z)$ — аналитическая функция всюду в области D.

Для доказательства введем множества:

$$E_n^{(1)} = \underset{z}{D} \left\{ \left| \operatorname{Re} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| \leqslant n, |\Delta z| < \frac{1}{n} \right\};$$

$$E_n^{(2)} = \underset{z}{D} \left\{ \left| \operatorname{Im} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right| \leqslant n, |\Delta z| < \frac{1}{n} \right\}.$$

В силу непрерывности $f(z)$ каждое из множеств $E_n^{(i)}$ $(i = 1, 2;\ n = 1, 2, \ldots)$ замкнуто (в D).

Так как $D = \bigcup_{i,n} E_n^{(i)} \cup A$, то найдутся фиксированные значения $i = i_1$, $n = n_1$ такие, что соответствующее им замкнутое множество $E_{n_1}^{(i_1)} = M_1$ всюду плотно на некоторой порции $D_1 \subset D$, т. е. $\overline{D}_1 = M_1$. Пусть для определенности $i_1 = 1$. Тогда при $|\Delta z| < \frac{1}{n_1}$ в каждой точке $z \in D_1$ будем иметь:

$$\left|\mathrm{Re}\,\frac{\Delta f}{\Delta z}\right| \leqslant n_1.$$

Далее рассуждения аналогичны доказательству теоремы.

Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Ю. Трохимчук, Непрерывные отображения и условия моногенности, Физматгиз, М., 1963.
2. W. Stepanoff, Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale, Матем. сб., **32**, 1925, 511—526.

Поступила 7.II 1968 г.

Институт математики АН УССР