УДК 517.9:535.4

Задача рассеивания при наличии плоской границы раздела между двумя средами

М. О. Ефимчук

Задача рассеивания для уравнения Шредингера на убывающем потенциале, а также задачи дифракции на телах ограниченных размеров достаточно полно изучены в работах [1—3]. Эти задачи характерны тем, что в них рассматривается почти финитное возмущение дифференциального уравнения Гельмгольца.

В данной заметке рассматривается задача рассеивания на финитных неоднородностях при наличии плоской границы раздела между двумя средами. Последнее условие приводит к тому, что основной дифференциальный оператор будет оператором с разрывными коэффициентами. Физическое содержание этой задачи следующее. Пусть плоская волна падает на плоскую границу раздела двух сред. Тогда возникают плоские отраженная и преломленная волны. Если, кроме этого, в одной из сред есть некоторая неоднородность, то указанные плоские волны будут рассеиваться и будут возникать рассеянные сферические волны.

1. Для математического описания указанной выше картины при некоторых предположениях на свойства среды рассмотрим следующую задачу: найти решение уравнения

$$\Delta u(x) + k^2(x)\, u(x) + c(x)\, u(x) = \varrho(x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка трехмерного пространства E_3,

$$k^2(x) = \begin{cases} k_1^2 & \text{при } x_3 > 0, \\ k_2^2 & \text{при } x_3 < 0, \end{cases}$$

которое удовлетворяет условиям сопряжения при $x_3 = 0$

$$u(x)|_{x_3=+0} = u(x)|_{x_3=-0}\,, \quad \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\right|_{x_3=+0} = \left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_3}\right|_{x_3=-0} \tag{2}$$

и условиям излучения при $|x| \to \infty$

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right). \tag{3}$$

В частности, для $x = (x_1, x_2, 0)$ при $|x| \to \infty$ условия (3) дают

$$u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} = o\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Теорема. *Если $c(x)$ и $\varrho(x)$ — непрерывные финитные функции и носители их лежат по одну сторону от границы раздела сред, то существует и единственно решение задачи* (1) — (3).

Наметим ход доказательства этой теоремы. Для этого рассмотрим сначала случай $c(x) = 0$. Тогда решение задачи (1) — (3) можно записать в виде

$$u(x) = \int \Pi(x, s)\, \varrho(s)\, ds, \tag{4}$$

где $\Pi(x, s)$ — функция Грина рассмотренной задачи. Явный вид $\Pi(x, s)$ выписан в [4]. На границе раздела $x_3 = 0$, по обе ее стороны, выполняются условия сопряжения (2). Методом перевала, аналогично как в [4], можно доказать, что эта функция удовлетворяет условиям излучения (3) при $|x| \to \infty$. Тогда для функции $u(x)$, которая задана (4), также можно доказать, что выполняются условия сопряжения (2) при $x_3 = 0$ и условия излучения (3) при $|x| \to \infty$.

Единственность решения задачи (1) — (3) при $c(x) \equiv 0$ доказывается при помощи формулы Грина для расширяющейся последовательности двух полусфер с учетом условий сопряжения (2) подобно тому, как это делается для уравнения Гельмгольца для случая однородной среды [5].

Доказательство теоремы при $c(x) \neq 0$ проводится аналогично тому, как это делается в работах [1, 2], а именно: если обозначить через $C(E_3)$

пространство Банаха непрерывных и равномерно ограниченных в E_3 функций, с нормой

$$\|\varphi\|_{C(E_3)} = \sup_{x \in E_3} |\varphi(x)|,$$

а через B и B_0 интегральные операторы:

$$\begin{aligned} B\varphi(x) &= -\int \Pi(x, s)\, c(s)\, \varphi(s)\, ds, \\ B_0\varphi(x) &= \int \Pi(x, s)\, \varphi(s)\, ds, \end{aligned} \tag{5}$$

то можно доказать, что задача (1) — (3) эквивалентна интегральному уравнению

$$f = B_0\varrho + Bf \tag{6}$$

в пространстве $C(E_3)$. Легко также показать, что оператор B является вполне непрерывным оператором в $C(E_3)$.

На основании теоремы Фредгольма можно утверждать, что существует и единственно решение уравнения $f - Bf = g$ при любом свободном члене, если однородное уравнение

$$f = Bf \tag{7}$$

имеет только тривиальное решение $f(x) \equiv 0$. Решение же однородного уравнения (7) в пространстве $C(E_3)$ при $|x| \to \infty$ убывает не медленее чем $O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$. Таким образом, решение уравнения (7) из $C(E_3)$ автоматически принадлежит $L_2(E_3)$. Но решение уравнения (7) является решением дифференциального уравнения

$$-(\Delta + c) f = k^2 f. \tag{8}$$

Отсутствие нетривиальных решений уравнения (8) из $L_2(E_3)$ можно доказать так же, как в работе [6]. Для этого в уравнении (8) перейдем к сферическим координатам, для чего введем поверхность S трехмерной единичной сферы и пространство Гильберта $H = L_2(S)$ функций, интегрируемых с квадратом на S. Решение уравнения (8) тогда будет вектором пространства H, зависящим от параметра r.

Уравнение (8) теперь можно записать как операторное уравнение

$$\frac{d^2}{dr^2} u(r) + 2r^{-1} \frac{du(r)}{dr} - r^{-2} Au(r) + (K^2 + C(r))\, u(r) = 0, \tag{9}$$

где операторы K^2, C, A определяются следующим образом:

$$K^2 u = \begin{cases} k_1^2 u & \text{при } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ k_2^2 u & \text{при } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \end{cases}$$

$$c(r)\, u(r) = c(x)\, u(x),$$

$$A = -(\sin\theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) - (\sin\theta)^{-2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2};$$

A задан при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ в верхнем полупространстве и при $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ в нижнем полупространстве, на S не зависит от r, определен для $u \in H$, которые дважды непрерывно дифференцируемы при $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ и при $\frac{\pi}{2} < < \theta < \pi$, а при $\theta = \frac{\pi}{2}$ выполняются условия сопряжения

$$u(r, \theta, \varphi)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}+0} = u(r, \theta, \varphi)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}-0},$$

$$\frac{\partial u(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}+0} = \frac{\partial u(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}-0}.$$

Нетрудно проверить, что эти операторы удовлетворяют условиям:
а) оператор K^2 — симметрический и положительно определенный

$$(K^2 f, g) = (f, K^2 g),$$
$$(K^2 f, f) \geqslant \lambda_0 (f, f),$$

где $\lambda_0 = \min(k_1^2, k_2^2)$;
б) оператор C — линейный, ограниченный, симметрический и

$$\| C(r) \|_H \leqslant \frac{\text{const}}{1 + r^{1+\varepsilon}}, \ \varepsilon > 0;$$

в) оператор A — симметрический и неотрицательный,

$$(Af, g) = (f, Ag), \ (Af, f) \geqslant 0,$$

для f и g из области его определения.

Результаты работы [6] относительно уравнения (9) для случая скалярного k можно перенести на наш случай, когда K — оператор. Тогда можно показать, что если операторы K^2, C, A удовлетворяют условиям а), б), в) соответственно, то уравнение (9) не имеет отличных от финитной функции решений, для которых

$$\int r^2 \| u(r) \|_H^2 dr < \infty,$$

где a — произвольное. Значит финитным будет и решение уравнения (8). Из единственности задачи Коши для уравнения (8) следует, что его решение есть тождественный нуль. Тем самым доказательство теоремы заканчивается.

2. Полученную теорему используем для решения задачи рассеивания, которая заключается в нахождении решения уравнения

$$\Delta u(x) + k^2(x) u(x) + c(x) u(x) = 0, \tag{10}$$

имеющего вид $u = u_0 + v$, которое удовлетворяет условиям сопряжения (2) при $x_3 = 0$, а u_0 представляет собой сумму падающей, отраженной и преломленной волн:

$$u_0 = \begin{cases} e^{ik_1\mu_0 x} + e^{ik_1\mu_1 x} V & \text{при } x_3 > 0, \\ e^{ik_2\mu_2 x}(1 + V) & \text{при } x_3 < 0, \end{cases} \tag{12}$$

где V — коэффициент отражения плоской волны μ_0, μ_1, μ_2 — единичные орты в E_3, характеризующие направление падающей, отраженной и преломленной плоских волн соответственно, рассеянная волна $v(x)$ удовлетворяет условиям излучения при $|x| \to \infty$

$$v(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial |x|} - ikv(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Подставляя (11) в (10), получаем, что

$$\Delta v(x) - k^2(x) v(x) + c(x) v(x) = -u_0(x) c(x),$$

т. е. $v(x)$ — решение задачи (1) — (3) с $\varrho(x) = -u_0(x) c(x)$. На основании предыдущей теоремы можно утверждать, что существует и единственно решение задачи рассеивания при наличии плоской границы раздела между двумя средами, если $c(x)$ — непрерывная финитная функция, носитель которой лежит по одну сторону от границы раздела сред.

Если в уравнении (1) выбрать

$$c(x) = \begin{cases} k_3^2 - k_1^2 & \text{при } x \in M, \\ 0 & \text{при } x \bar{\in} M, \end{cases}$$

где M — ограниченная область, то мы придем к задаче дифракции плоских волн на ограниченной области M при наличии плоской границы раздела сред. Эта задача формулируется следующим образом: найти решение уравнения

$$\Delta u(x) + k^2(x) u(x) = 0,$$

где

$$k^2(x) = \begin{cases} k_1^2 & \text{при } x_3 > 0, \ x \bar{\in} M, \\ k_3^2 & \text{при } x \in M, \\ k_2^2 & \text{при } x_3 < 0, \ x \bar{\in} M, \end{cases}$$

а $u(x)$ имеет вид (11), (12) и удовлетворяет условиям сопряжения (2) при $x_3 = 0$ и аналогичным условиям сопряжения на границе области M; на бесконечности функция $v(x)$ должна удовлетворять условиям излучения (3).

Из доказанной теоремы следует существование и единственность решения сформулированной задачи дифракции, если $M \subset \{x : x_3 > 0\}$.

Аналогично ставятся задачи рассеивания и дифракции для сферических волн.

В заключение автор выражает благодарность Л. П. Нижнику за постановку задачи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Повзнер, О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$. Матем. сб., т. 32 (74), № 1, 1953.
2. Л. П. Нижник, Задача рассеивания для одного уравнения Шредингера, УМЖ, т. XII, №, 2, 1960.
3. В. Д. Купрадзе, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения ГИТТЛ, М. — Л., 1950.
4. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, Изд-во АН УССР, М., 1957.
5. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», М., 1966.
6. Т. Като, Свойства роста решений приведенного волнового уравнения с переменными коэффициентами, математика, Период. сб. переводов ин. ст., т. 5, № 1, 1961.

Поступила 10.XI 1967 г.,
после переработки — 10.I 1969 г.
Институт математики АН УССР