УДК 517.948.34

К вопросу обоснования метода усреднения для интегро-дифференциальных уравнений

Г. Вахабов

Вопрос о распространении метода усреднения, разработанного Н. Н. Боголюбовым [1] для систем дифференциальных уравнений в стандартной форме, на системы интегро-дифференциальных уравнений вида (1) рассматривался в ряде работ. В частности, в [4] была доказана теорема о близости решений основных и усредненных уравнений для конечного, но большого интервала времени $t \in (0, L/\varepsilon)$.

В данной работе доказывается аналогичная теорема при менее жестких ограничениях. Для ее доказательства уравнение (1) преобразуется к некоторому специальному виду, для которого можно непосредственно применять аналогичную теорему Боголюбова — Митропольского [2].

Итак, рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds\right), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор, $f(t, x, y) = (f_1(t, x, y), \ldots, f_n(t, x, y))$ — n-мерная вектор-функция, определенная при $t \in [0, L/\varepsilon]$, $x \in D$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in D_1$, $\varphi(t, s, x) = (\varphi_1(t, s, x), \ldots, \varphi_m(t, s, x))$ — m-мерная вектор-функция, определенная при $t \in [0, L/\varepsilon]$, $s \in [0, L/\varepsilon]$, $x \in D$, D, D_1 — некоторые области эвклидовых пространств E_n, E_m, $L > 0$ — фиксированная постоянная.

Предположим, что система уравнений (1) имеет единственное решение $x = x(t)$, проходящее при $t = 0$ через точку $x = x^0$, и такое, что $x(t) \in D$, $\int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds \in D_1$ при $t \in [0, T]$, $0 < T \leqslant L/\varepsilon$. Следуя [3], преобразуем выражение

$$\int_0^s \varphi(t, \tau, x(s))\, d\tau. \tag{2}$$

Пусть функция $\varphi(t, s, x)$ непрерывно по t, s имеет непрерывные частные производные по x_i. Тогда, дифференцируя (2) по s, получим

$$\frac{d}{ds}\left\{\int_0^s \varphi(t, \tau, x(s))\, d\tau\right\} = \varphi(t, s, x(s)) + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^s \varphi(t, \tau, x(s))\, d\tau\right\}\frac{dx}{ds} \tag{3}$$

и, интегрируя тождество (3), найдем, что

$$\begin{gathered}\int_0^t \varphi(t, s, x(s))\, ds = \int_0^t \varphi(t, \tau, x(t))\, d\tau - \\ - \varepsilon\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^s \varphi(t, \tau, x(s))\, d\tau\right\} f\left(s, x(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x(\tau))\, d\tau\right) ds.\end{gathered} \tag{4}$$

Подставив (4) в уравнение (1), имеем

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(t, x, \psi(t, x)) + R(t, \varepsilon), \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered}R(t, \varepsilon) = \varepsilon\left\{f\left[t, x(t), \psi(t, x(t)) - \right.\right. \\ \left.\left. - \varepsilon\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\Phi(t, s, x(s))\, f\left(s, x(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x(\tau))\, d\tau\right) ds\right] - f[t, x(t), \psi(t, x(t))]\right\},\end{gathered} \tag{6}$$

$$\psi(t, x) = \int_0^t \varphi(t, \tau, x)\, d\tau, \qquad \psi(t, x(t)) \in D_1 \quad \text{при} \quad t \in [0, T],$$

$$\Phi(t, s, x) = \int_0^s \varphi(t, \tau, x)\, d\tau.$$

Теперь найдем оценку $R(t, \varepsilon)$. Для этого предположим, что выполняются неравенства

$$\| f(t, x, y) \| \leqslant M, \quad \left\| \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y} \right\| \leqslant Q,$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi(t, s, x)}{\partial x} \right\| \leqslant N\varphi_0(t, s), \quad P(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi_0(t, s)\, ds \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

для всех $t \in [0, L/\varepsilon]$, $s \in [0, L/\varepsilon]$, $x \in D$, $y \in D_1$. Тогда имеем

$$\| R(t, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon \| f \Big[t, x(t), \psi(t, x(t)) -$$

$$- \varepsilon \int_0^t \frac{\partial \Phi(t, s, x(s))}{\partial x} f\left(s, x(s), \int_0^s \varphi(s, \tau, x(\tau))\, d\tau\right) ds \Big] - f[t, x(t), \psi(t, x(t))] \| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial f(t, x, \tilde{\psi})}{\partial \psi} \right\| \left\| \int_0^t \frac{\partial \Phi(t, s, x(s))}{\partial x} f\left(s, x, \int_0^s \varphi d\tau\right) ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 Q \int_0^t \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\| \| f \| \, ds \leqslant \varepsilon^2 QMN \int_0^t \varphi_0(t, s)\, ds \leqslant \varepsilon QMNL \frac{\varepsilon}{L} \int_0^{L/\varepsilon} \varphi_0(t, s)\, ds =$$

$$= \varepsilon QMNLP(L/\varepsilon).$$

Поскольку $R(t, \varepsilon)$ имеет более высокий порядок малости чем $\varepsilon f(t, x, \psi(t, x))$, можно ожидать, что решения исходной системы (1) близки к решениям системы

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon f\left(t, \xi, \int_0^t \varphi(t, \tau, \xi(t))\, d\tau\right) \tag{7}$$

для всех $t \in [0, L/\varepsilon]$, т. е. разность их решений будет меньше любого наперед заданного малого $\eta > 0$. Докажем это.

Предположим, что функция $\psi(t, x)$ принадлежит D_1 при $t \in [0, L/\varepsilon]$, $x \in D$ и такая, что $f(t, x, \psi(t, x))$ определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные по x первого порядка, ограниченные постоянной K

$$\left\| \frac{\partial f(t, x, \psi(t, x))}{\partial x} \right\| \leqslant K$$

для $(t, x) \in [0, L/\varepsilon] \times D$. Предположим также, что уравнение (7) имеет решение $\xi = \xi(t)$, принадлежащее со своей ϱ-окрестностью области D для $t \in [0, L/\varepsilon]$ и для которого $\xi(0) = x(0)$. Тогда на интервале $0 < t < T$, $T \leqslant L/\varepsilon$, на котором $x(t) \in D$, имеем

$$\left\| \frac{d(x - \xi)}{dt} \right\| \leqslant \varepsilon K \| x - \xi \| + \| R(t, \varepsilon) \|,$$

$$(x - \xi)_{t=0} = 0.$$

Следовательно,

$$\| x - \xi \| \leqslant \int_0^t e^{\varepsilon K(t-\tau)} \| R(\tau, \varepsilon) \| \, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant e^{KL} \int_0^{L/\varepsilon} \| R(\tau, \varepsilon) \| \, d\tau \leqslant e^{KL} \int_0^{L/\varepsilon} \varepsilon QMNLP(L/\varepsilon)\, d\tau = e^{KL} QMNL^2 P(L/\varepsilon).$$

Поскольку при $\varepsilon \to 0$ $P(L/\varepsilon) \to 0$, то можно найти столь малое $\varepsilon_0 > 0$, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$, не превосходящего ε_0, удовлетворялось неравенство

$$P(L/\varepsilon) \leqslant \frac{\sigma}{2QMNL^2 e^{KL}}, \quad \sigma = \min(\eta, \varrho).$$

Тогда имеем

$$\|x(t)-\xi(t)\| < \frac{\sigma}{2} < \eta \text{ для } t \in (0, T), \ T \leqslant L/\varepsilon. \qquad (8)$$

Пусть система уравнений (1) удовлетворяет не только условиям существования и единственности, но и условиям продолжимости решений. Тогда покажем, что неравенство (8) выполняется на всем интервале $0 < t < L/\varepsilon$. Действительно, если неравенство

$$\|x(t)-\xi(t)\| < \varrho$$

не выполняется на всем интервале $0 < t < L/\varepsilon$, то в силу непрерывности найдется такое $t_1 \in (0, L/\varepsilon)$, что будут справедливы соотношения

$$\|x(t_1)-\xi(t_1)\| < \varrho, \ \|x(t_1)-\xi(t_1)\| > \varrho-\delta,$$

где δ — сколь угодно малая величина. Фиксируем теперь число a так, чтобы $a < \varrho/2$. Возьмем

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{2}-a\right)$$

и положим $T = t_1$, что возможно, так как на сегменте $[0, t_1]$ $x(t) \in D$. Тогда находим

$$\|x(t_1)-\xi(t_1)\| < \varrho/2 + a = \varrho - 2\delta < \varrho - \delta.$$

Полученное противоречие и доказывает высказанное утверждение.

Резюмируя сказанное, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть правая часть системы интегро-дифференциальных уравнений* (1) *такова, что выполняются условия:*

1) *функция $f(t, x, y)$ непрерывна, ограничена вместе со своими частными производными по x, y:*

$$\|f(t,x,y)\| \leqslant M, \ \left\|\frac{\partial f(t,x,y)}{\partial x}\right\| \leqslant K, \ \left\|\frac{\partial f(t,x,y)}{\partial y}\right\| \leqslant Q \qquad (9)$$

для всех $(t, x, y) \in [0, L/\varepsilon] \times D \times D_1$;

2) *функция $\Phi(t,s,x) = \int\limits_0^s \varphi(t,\tau,x)\,d\tau$ непрерывна вместе со своими частными производными по x и существуют положительная постоянная N, положительная функция $\varphi_0(t,s)$, что для всех $(t,s,x) \in [0, L/\varepsilon] \times [0, L/\varepsilon] \times D$ выполняется неравенство*

$$\left\|\frac{\partial \Phi(t,s,x)}{\partial x}\right\| \leqslant N\varphi_0(t,s), \qquad (10)$$

где

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t \varphi_0(t,s)\,ds = 0. \qquad (11)$$

Тогда любым сколь угодно малым положительным ϱ, η и сколь угодно большому L можно сопоставить такое положительное ε_0, что если $\xi = \xi(t)$ — решение уравнения (7), *определенное на интервале $0 < t < L/\varepsilon$ и лежащее в области D вместе со своей ϱ-окрестностью, то для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ на интервале $0 < t < L/\varepsilon$ будет выполняться неравенство*

$$\|x(t)-\xi(t)\| < \eta,$$

где $x = x(t)$ — решение уравнения (1), *совпадающее с $\xi(t)$ при $t = 0$.*

Таким образом, мы доказали, что на интервале $0 < t < L/\varepsilon$ решение интегро-дифференциального уравнения (1) близко к решению дифференциального уравнения (7) и что их разность может быть сделана сколь угодно малой для достаточно малого ε на сколь угодно большом интервале $0 < t < L/\varepsilon$. Это важно тем, что обыкновенное дифференциальное уравнение в ряде случаев будет проще для исследования, чем исходное интегро-дифференциальное уравнение. Более того, уравнение (7) является дифференциальным уравнением в стандартной форме и к нему можно непосредственно применять известную теорему Боголюбова — Митропольского по обоснованию метода усреднения для таких уравнений [2]. Поэтому, если существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t, \xi, \psi(t, \xi))\, dt = f_0(\xi), \tag{12}$$

то вместо уравнения (7) без особого ущерба для точности можно рассматривать усредненное уравнение

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \varepsilon f_0(\bar{\xi}). \tag{13}$$

Мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть система интегро-дифференциальных уравнений* (1) *такова, что:*

1) *выполняются условия теоремы* 1;

2) *равномерно по отношению к* ξ *в области* D *существует предел* (12).

Тогда любым сколь угодно малым положительным ϱ, η *и сколь угодно большому* L *можно сопоставить такое положительное* ε_0, *что если* $\bar{\xi} = \bar{\xi}(t)$ — *решение уравнения* (13), *определенное на интервале* $0 < t < L/\varepsilon$ *и лежащее в области* D *вместе со всей своей* ϱ-*окрестностью, то для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *на интервале* $0 < t < L/\varepsilon$ *будет выполняться неравенство*

$$\| x(t) - \bar{\xi}(t) \| < \eta,$$

где $x = x(t)$ — *решение уравнения* (1), *совпадающее с* $\bar{\xi}(t)$ *при* $t = 0$.

Как видно из формулировки теоремы 2, существенное отличие условий, при которых она справедлива, от условий аналогичной теоремы Филатова А. Н. [4], состоит в том, что ограничение в неравенстве (10) накладывается не на функцию $\varphi(t, \tau, x)$, как это предполагается в [4], а на производную по x от ее интеграла по переменному τ. Итак, для системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f\left(t, x\int_0^t \left[\varphi_1(x)\frac{t^a}{s+1} + \varphi_2(t, s)\right] ds\right), \quad 0 \leqslant \alpha < 1$$

условия теоремы работы [4] не выполняются, так как $\|\varphi(t, s, x)\| \leqslant N\varphi_0(t)$, но $\frac{1}{t}\int_0^t t\varphi_0(t)\, dt$ не стремится к 0 при $t \to \infty$, в то время как наши условия (10), (11) имеют место:

$$\left\| \frac{\partial \Phi(t, s, x)}{\partial x} \right\| \leqslant N\varphi_0(t, s),$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \varphi_0(t, s)\, ds = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, К., 1945.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. А. М. Самойленко, Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра, УМЖ, т. XIV, № 3, 1962.
4. А. Н. Филатов, Усреднение в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, «Фан», Ташкент, 1967.

Поступила 22.IV 1969 г.
Институт математики АН УССР