УДК 513.88.

Критерий бисимметричности вполне непрерывных операторов

В. И. Годич

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Оператор I, определенный во всем $\mathfrak{H}$, называется инволюцией, если $I^2=E$ и $(If, Ig)=\overline{(f,g)}$ $(f, g \in \mathfrak{H})$. Линейный ограниченный оператор A, действующий в $\mathfrak{H}$, называется бисимметричным ((I_1, I_2)-бисимметричным) [1], если в $\mathfrak{H}$ существуют такие две инволюции I_1 и I_2, что

$$AI_1 = I_1A, \quad AI_2 = -I_2A. \tag{1}$$

В данной статье выясняются необходимые и достаточные условия бисимметричности вполне непрерывных операторов.

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}^+\oplus\mathfrak{H}^-$ $(\dim\mathfrak{H}^+=\dim\mathfrak{H}^-=n<\infty)$. *Если в* $\mathfrak{H}$ *заданы инволюции* I_1 *и* I_2 *так, что*

$$I_1\mathfrak{H}^\pm=\mathfrak{H}^\pm, \quad I_2\mathfrak{H}^+=\mathfrak{H}^-,$$

то существуют ортонормированные базисы $h_1^+, h_2^+, \ldots, h_n^+$ и $h_1^-, h_2^-, \ldots, h_n^-$ *соответственно в* $\mathfrak{H}^+$ *и* $\mathfrak{H}^-$, *для которых*

$$I_1h_k^+=h_k^+, \quad I_1h_k^-=h_k^-, \quad I_2h_k^+=e^{i\tau_k}h_k^- \quad (0\leqslant\tau_k<\pi).$$

Доказательство. Рассмотрим унитарный оператор $U=I_2I_1$ и заметим, что подпространства $\mathfrak{H}^+$ и $\mathfrak{H}^-$ инвариантны относительно U^2. Если $e^{2i\tau_j}$ $(0\leqslant\tau_j<\pi;\ j=1, 2, \ldots, r)$ — собственные числа оператора, индуцированного оператором U^2 в $\mathfrak{H}^+$, то

$$\mathfrak{H}^+=\mathfrak{H}_1^+\oplus\mathfrak{H}_2^+\oplus\ldots\oplus\mathfrak{H}_r^+ \quad (U^2h=e^{2i\tau_j}h, h\in\mathfrak{H}_j^+).$$

Очевидно, $\mathfrak{H}^-=\mathfrak{H}_1^-\oplus\mathfrak{H}_2^-\oplus\ldots\oplus\mathfrak{H}_r^-$, где $\mathfrak{H}_j^-=U\mathfrak{H}_j^+$. Если $h^-\in\mathfrak{H}^-$, то $h^-=Uh^+$ $(h^+\in\mathfrak{H}_j^+)$ и, следовательно,

$$U^2h^-=UU^2h^+=e^{2i\tau_j}Uh^+=e^{2i\tau_j}h^-.$$

Таким образом, подпространство $\mathfrak{H}_j^+\oplus\mathfrak{H}_j^-$ представляет собой совокупность всех собственных векторов оператора U^2, отвечающих собственному числу $e^{2i\tau_j}$.

Пусть $h\in\mathfrak{H}_j^+\oplus\mathfrak{H}_j^-$. Тогда

$$I_2I_1I_2I_1h=e^{2i\tau_j}h, \quad I_2I_1h=e^{2i\tau_j}I_1I_2h,$$

так что

$$U^2 I_1 h = e^{2i\tau_j} I_1 h, \quad U^2 I_2 h = e^{2i\tau_j} I_2 h.$$

Из последних двух равенств вытекает, что $\mathfrak{H}_j^+ \oplus \mathfrak{H}_j^-$ инвариантно относительно I_1 и I_2. Поэтому

$$I_1 \mathfrak{H}_j^+ = \mathfrak{H}_j^+, \quad I_2 \mathfrak{H}_j^+ = \mathfrak{H}_j^-.$$

Выберем в $\mathfrak{H}_1^+$ ортонормированный базис $h_1^+, h_2^+, \ldots, h_{r_1}^+$ так, чтобы выполнялись равенства $I_1 h_k^+ = h_k^+$ $(k = 1, 2, \ldots, r_1)$, и положим $h_k^- = e^{-i\tau_1} I_2 h_k^+$. Тогда $I_2 h_k^+ = e^{i\tau_1} h_k^-$ и

$$I_1 h_k^- = e^{i\tau_1} I_1 I_2 h_k^+ = e^{-i\tau_1} I_2 I_1 h_k^+ = e^{-i\tau_1} I_2 h_k^-.$$

Поступая аналогично с остальными подпространствами $\mathfrak{H}_j^+$, получим утверждение леммы.

Лемма 2. *Для того чтобы вполне непрерывный самосопряженный оператор H был (I_1, I_2)-бисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы в подпространстве $\overline{H\mathfrak{H}}$ существовал ортонормированный базис $\{h_n^-, \ldots, h_2^-, h_1^-, h_1^+, h_2^+, \ldots, h_n^+\}$ $(n \leqslant \infty)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

$$Hh_k^- = -\omega_k h_k^-, \quad Hh_k^+ = \omega_k h_k^+ \quad (\omega_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$I_1 h_k^\pm = h_k^\pm, \quad I_2 h_k^\pm = e^{i\sigma_k} h_k^\mp \quad (0 \leqslant \sigma_k < \pi,\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство. Если оператор H (I_1, I_2)-бисимметричен, то из соотношений (1) легко следует, что его спектр симметричен относительно начала координат, а его собственные подпространства, отвечающие симметричным точкам спектра, имеют одну и ту же размерность. Следовательно, подпространство $\overline{H\mathfrak{H}}$ можно представить в виде ортогональной суммы подпространств $\mathfrak{G}_k^+ \oplus \mathfrak{G}_k^-$ $(\dim \mathfrak{G}_k^+ = \dim \mathfrak{G}_k^- < \infty)$, где $\mathfrak{G}_k^+$ и $\mathfrak{G}_k^-$ — собственные подпространства оператора H, принадлежащие соответственно собственным числам ω_k и $-\omega_k$. Поскольку $I_1 \mathfrak{G}_k^\pm = \mathfrak{G}_k^\pm$, $I_2 \mathfrak{G}_k^\pm = \mathfrak{G}_k^\mp$, то остается применить лемму 1. Достаточность проверяется непосредственно.

Теорема. *Для того чтобы вполне непрерывный оператор A, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, был бисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы в подпространствах $\overline{A_R \mathfrak{H}}$ $\left(A_R = \dfrac{A + A^*}{2}\right)$ и $\overline{A_I \mathfrak{H}}$ $\left(A_I = \dfrac{A - A^*}{2i}\right)$ существовали ортонормированные базисы $\{f_n^-, \ldots, f_1^-, f_1^+, \ldots, f_n^+\}$ $(n \leqslant \infty)$ и $\{g_m^-, \ldots, g_1^-, g_1^+, \ldots, g_m^+\}$ $(m \leqslant \infty)$ соответственно, удовлетворяющие условиям:*

$$\left.\begin{aligned} A_R f_j^\pm &= \pm \sigma_j f_j^\pm \quad (\sigma_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots, n), \\ A_I g_k^\pm &= \pm \tau_k g_k^\pm \quad (\tau_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$(f_j^\pm, g_k^-) = e^{i\lambda_k} \overline{(f_j^\pm, g_k^+)} \quad (0 \leqslant \lambda_k < \pi,\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, m), \tag{3}$$

$$(g_k^\pm, f_j^-) = e^{i\mu_j} \overline{(g_k^\pm, f_j^+)} \quad (0 \leqslant \mu_j < \pi;\ k = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть оператор A вполне непрерывен и (I, I_2)-бисимметричен. Тогда операторы A_R и A_I также вполне непрерывны, причем первый из них (I_1, I_2)-бисимметричен, а второй — (I_2, I_1)-бисимметричен.

Согласно лемме 2 в подпространствах $\overline{A_R\mathfrak{H}}$ и $\overline{A_I\mathfrak{H}}$ существуют ортонормированные базисы $\{f_n^-, \ldots, f_1^-, f_1^+, \ldots, f_n^+\}$ и $\{g_m^-, \ldots, g_1^-, g_1^+, \ldots, g_m^+\}$, удовлетворяющие условию (2), и такие, что

$$I_1 f_j^{\pm} = f_j^{\pm}, \quad I_2 f_j^{\pm} = e^{i\mu_j} f_j^{\mp}, \quad I_2 g_k^{\pm} = g_k^{\pm}, \quad I_1 g_k^{\pm} = e^{i\lambda_k} g_k^{\mp}$$
$$(0 \leqslant \mu_j < \pi, \ 0 \leqslant \lambda_k < \pi).$$

Следовательно,

$$(f_j^{\pm}, g_k^-) = \overline{(I_1 f_j^{\pm}, I_1 g_k^-)} = e^{i\lambda_k} \overline{(f_j^{\pm}, g_k^+)},$$
$$(g_k^{\pm}, f_j^-) = \overline{(I_2 g_k^{\pm}, I_2 f_j^-)} = e^{i\mu_j} \overline{(g_k^{\pm}, f_j^+)}.$$

Переходя к доказательству достаточности, обозначим через $\mathfrak{H}_0$ наименьшее подпространство, содержащее $\overline{A_R\mathfrak{H}}$ и $\overline{A_I\mathfrak{H}}$. Пусть P и Q — ортопроекторы на $\overline{A_I\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{H}_0 \ominus \overline{A_I\mathfrak{H}}$, соответственно, действующие в $\mathfrak{H}_0$. Зададим в $\overline{A_I\mathfrak{H}}$ инволюцию I_1', полагая

$$I_1' g_k^{\pm} = e^{i\lambda_k} g_k^{\mp} \quad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

Так как

$$P f_j^{\pm} = \sum_{k=1}^{m} (f_j^{\pm}, g_k^-) g_k^- + \sum_{k=1}^{m} (f_j^{\pm}, g_k^+) g_k^+,$$

то в силу формул (3)

$$I_1'(P f_j^{\pm}) = \sum_{k=1}^{m} \overline{(f_j^{\pm}, g_k^-)}\, e^{i\lambda_k} g_k^+ + \sum_{k=1}^{m} \overline{(f_j^{\pm}, g_k^+)}\, e^{i\lambda_k} g_k^- =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} (f_j^{\pm}, g_k^+)\, g_k^+ + \sum_{k=1}^{m} (f_j^{\pm}, g_k^-)\, g_k^- = P f_j^{\pm}. \tag{6}$$

Кроме того, снова по формулам (3)

$$(P f_r^+, P f_s^+) = \sum_{k=1}^{m} (f_r^+, g_k^-) \overline{(f_s^+, g_k^-)} + \sum_{k=1}^{m} (f_r^+, g_k^+) \overline{(f_s^+, g_k^+)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \overline{(f_r^+, g_k^+)} (f_s^+, g_k^+) + \sum_{k=1}^{m} (f_r^+, g_k^+) \overline{(f_s^+, g_k^+)},$$

так что все скалярные произведения вида

$$(Q f_r^+, Q f_s^+) = (f_r^+, f_s^+) - (P f_r^+, P f_s^+) \quad (r, \ s = 1, 2, \ldots, n)$$

оказываются вещественными. Аналогично можно показать вещественность скалярных произведений вида (Qf_r^-, Qf_s^-) и (Qf_r^+, Qf_s^-). Поэтому (см. [2], лемма 3) в $\mathfrak{H}_0 \ominus \overline{A_1\mathfrak{H}}$ существует инволюция I_1'' такая, что

$$I_1''(Q f_j^{\pm}) = Q f_j^{\mp} \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Зададим в $\mathfrak{H}_0$ инволюцию $I_1 = I_1'P + I_1''Q$ и доопределим ее произвольно в $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$. Ввиду равенств (5) — (7) имеем:

$$I_1 g_k^{\pm} = e^{i\lambda_k} g_k^{\mp}, \quad I_1 f_j^{\pm} = f_j^{\pm}. \tag{8}$$

Применяя теперь равенства (4) и меняя в предыдущих рассуждениях подпространства $\overline{A_I \mathfrak{H}}$ и $\overline{A_R \mathfrak{H}}$ местами, докажем существование инволюции I_2, для которой

$$I_2 f_j^{\pm} = e^{i\mu_j} f_j^{\mp}, \quad I_2 g_k^{\pm} = g_k^{\pm}. \tag{9}$$

Равенства (2), (8) и (9) означают, согласно лемме 2, что операторы A_R и A_I соответственно (I_1, I_2)- и (I_2, I_1)-бисимметричны. Этим доказана (I_1, I_2)-бисимметричность оператора A.

Выражаю свою признательность М. С. Бродскому за существенную помощь при написании данной заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Годич, Об инвариантных подпространствах вполне непрерывных бисимметричных операторов, УМЖ, т. 18, № 3, 1966.
2. В. И. Годич, И. Е. Луценко, О представлении унитарного оператора в виде произведения двух инволюций, УМН, т. XX, вып. 6 (126), 1965.

Поступила 6.IX 1967 г.
Каменец-Подольский педагогический институт