УДК 531.352

К теории вращательных движений свободного твердого тела, несущего маятники

В. А. Гробов

Рассматриваются взаимосвязанные вращательные движения свободного твердого тела, стабилизируемого быстрым вращением относительно оси наибольшего момента инерции, и колебания расположенного на нем сферического маятника [7] или системы плоских маятников [8], предназначенных для гашения нутационных колебаний вращающегося тела.

В первом случае задача приводится к решению системы взаимосвязанных нелинейных дифференциальных уравнений вращательного движения тела и квазилинейных уравнений, описывающих гироскопически связанные колебания маятника, имеющих вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{\omega}_x + s_1\omega_z\omega_y = \mu F_1(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \alpha, \beta, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z, \dot{\alpha}, \dot{\beta}),\\
&\dot{\omega}_y - s_2\omega_z\omega_x = \mu F_2(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \alpha, \beta, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z, \dot{\alpha}, \dot{\beta}),\\
&\dot{\omega}_z = \mu F_3(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \alpha, \beta, \dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z, \dot{\alpha}, \dot{\beta}),\\
&\ddot{\alpha} - 2\omega_z\dot{\beta} + \omega_n^2\alpha = \mu G_1(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega_x, \omega_y, \omega_z),\\
&\ddot{\beta} + 2\omega_z\dot{\alpha} + \omega_n^2\beta = \mu G_2(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega_x, \omega_y, \omega_z).
\end{aligned} \tag{1}$$

В уравнениях (1) ω_x, ω_y, ω_z — проекции угловой скорости тела на связанные с ним оси (рисунок), α, β — углы поворота маятника относительно осей x и y, величины s_1 и s_2 определяются по формулам:

$$s_1 = \frac{I_z - I_y}{I_x}, \quad s_2 = \frac{I_z - I_x}{I_y},$$

где I_x, I_y и I_z — главные моменты инерции тела; ω_n — приведенная частота маятника, μ — малый параметр.

Функции F_1, F_2, F_3, G_1 и G_2 учитывают нелинейные инерционные связи между координатами, нелинейность упругих и диссипативных сил и т. д.

Во втором случае задача сводится к исследованию системы уравнений квазинормального типа

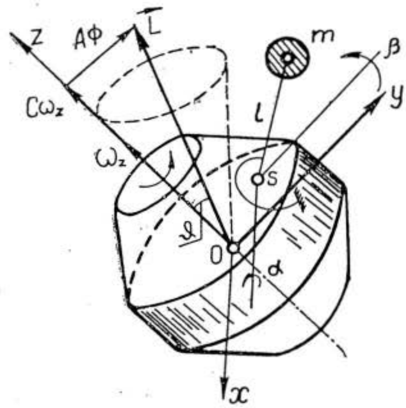
$$\begin{aligned}
&\dot{\omega}_x + s_1\omega_z\omega_y = \mu F_1(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_n),\\
&\dot{\omega}_y - s_2\omega_z\omega_x = \mu F_2(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_n),\\
&\dot{\omega}_z = \mu F_3(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_n), \qquad (2)\\
&\ddot{\alpha}_i + \omega_i^2\alpha_i = \mu G_i(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}$$

где α_i — углы отклонения маятников.

Для решения систем (1) и (2) можно воспользоваться методом возмущений [1—3].

При $\mu = 0$ невозмущенное движение системы (1) описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}
&\dot{\omega}_x + s_1\omega_z\omega_y = 0,\\
&\dot{\omega}_y - s_2\omega_z\omega_x = 0,\\
&\omega_z = \omega_{z0} = \text{const}, \qquad (3)\\
&\ddot{\alpha} - 2\omega_z\dot{\beta} + \omega_n^2\alpha = 0,\\
&\ddot{\beta} + 2\omega_z\dot{\alpha} + \omega_n^2\beta = 0.
\end{aligned}$$



Первые три уравнения системы (3) описывают регулярную прецессию твердого тела, а два последних — гироскопически связанные колебания маятника без учета возмущений, обусловленных движением объекта, на котором он подвешен.

В случае, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения ($I_x = I_y = A$, $I_z = C$, $s_1 = s_2 = s$), компоненты угловой скорости тела в невозмущенном движении имеют значения [5]

$$\begin{aligned}
&\omega_x = \Phi\cos(\Omega t + \delta),\\
&\omega_y = \Phi\sin(\Omega t + \delta), \quad \omega_z = \omega_{z0},
\end{aligned} \qquad (4)$$

$\Omega = \dfrac{C - A}{A}\omega_{z0}$ — частота свободной прецессии.

Колебания маятника без учета возмущений, обусловленных движением объекта, на котором он установлен, описываются выражениями:

$$\begin{aligned}
&\alpha = a_1\sin(\lambda_1 t + \xi_1) + a_2\sin(\lambda_2 t + \xi_2),\\
&\beta = a_1 c_1\cos(\lambda_1 t + \xi_1) + a_2 c_2\cos(\lambda_2 t + \xi_2).
\end{aligned} \qquad (5)$$

Частоты колебаний λ_1 и λ_2 определяются из характеристического уравнения

$$\lambda^4 - 2(\omega_n^2 + 2\omega_{z0}^2)\lambda^2 + \omega_n^4 = 0. \qquad (6)$$

Коэффициенты распределения c_1 и c_2 определяются по формулам:

$$c_1 = -\frac{\omega_n^2 - \lambda_1^2}{2\omega_{z0}\lambda_1}, \quad c_2 = -\frac{\omega_n^2 - \lambda_2^2}{2\omega_{z0}\lambda_2}, \tag{7}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{ml^2} - \omega_{z0}^2,$$

k — жесткость пружины, m — масса маятника, l — длина маятника.

Используя формулы (4) и (5), как формулы преобразования переменных, приведем уравнения (1) к стандартной форме [1 — 3]:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mu (F_1 \cos\Theta + F_2 \sin\Theta),$$

$$\Phi \frac{d\delta}{dt} = \mu (-F_1 \sin\Theta + F_2 \cos\Theta),$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \mu F_3, \tag{8}$$

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\mu\omega_z}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}\left[\frac{1}{c_1} G_1 \cos\Psi_1 - G_2 \sin\Psi_1\right],$$

$$\frac{da_2}{dt} = \frac{\mu\omega_z}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}\left[\frac{1}{c_2} G_1 \cos\Psi_2 - G_2 \sin\Psi_2\right],$$

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\mu\omega_z}{a_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[\frac{1}{c_1} G_1 \sin\Psi_1 - G_2 \cos\Psi_1\right],$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\mu\omega_z}{a_2(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}\left[\frac{1}{c_2} G_1 \sin\Psi_2 - G_2 \cos\Psi_2\right],$$

где $\Theta = \Omega t + \delta$, $\Psi_i = \lambda_i t + \xi_i$ $(i = 1, 2)$. Угол нутации ϑ в соответствии с рисунком находится из соотношения

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{A\Phi}{C\omega_z}. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь несимметричное тело $I_x = A$, $I_y = B$, $I_z = C$. Для объектов, стабилизируемых вращением, $\omega_z \gg \omega_x$ и $\omega_z \gg \omega_y$. Следуя [7, 8], предположим, что угол нутации ϑ не превышает значений $\vartheta = 10 - 15°$. В этом случае эллиптические функции Якоби, выражающие проекции угловых скоростей ω_x, ω_y, ω_z [5, 6], можно с достаточной точностью заменить тригонометрическими, в результате чего получим

$$\omega_x = \Phi^* \cos(pt + \delta^*),$$

$$\omega_y = \Phi^* \frac{(s_1 s_2)^{\frac{1}{2}}}{s_2} \sin(pt + \delta^*), \tag{10}$$

$$\omega_z = \omega_{z0},$$

где частота свободной прецессии p имеет значение

$$p = (s_1 s_2)^{\frac{1}{2}} \omega_{z0}.$$

В рассматриваемом случае первые три уравнения системы (8) имеют вид:

$$\frac{d\Phi^*}{dt}=\mu\left[F_1\cos\Theta^*+\frac{s_2}{(s_1s_2)^{\frac{1}{2}}}F_2\sin\Theta^*\right],$$

$$\frac{d\delta^*}{dt}=\frac{\mu}{\Phi^*}\left[-F_1\sin\Theta^*+\frac{s_2}{(s_1s_2)^{\frac{1}{2}}}F_2\cos\Theta^*\right], \tag{11}$$

$$\frac{d\omega_z}{dt}=\mu F_3,\quad \Theta^*=pt+\delta^*.$$

Применяя для решения уравнений (8) принцип усреднения, получим следующую систему уравнений первого приближения:

$$\frac{d\widetilde{\Phi}}{dt}=\mu(f_1+h_2),$$

$$\frac{d\widetilde{\delta}}{dt}=\frac{\mu}{\widetilde{\Phi}}(-h_1+f_2),\quad \frac{d\widetilde{\omega}_z}{dt}=\mu f_3,$$

$$\frac{d\widetilde{a}_1}{dt}=\frac{\mu\widetilde{\omega}_z}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}\left(\frac{1}{c_1}q_{11}-p_{21}\right),$$

$$\frac{d\widetilde{a}_2}{dt}=\frac{\mu\widetilde{\omega}_z}{\lambda_2^2-\lambda_1^2}\left(\frac{1}{c_2}q_{12}-p_{22}\right), \tag{12}$$

$$\frac{d\widetilde{\xi}_1}{dt}=\frac{\mu\widetilde{\omega}_z}{\widetilde{a}_1(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}\left(\frac{1}{c_1}p_{11}-q_{21}\right),$$

$$\frac{d\widetilde{\xi}_2}{dt}=\frac{\mu\widetilde{\omega}_z}{\widetilde{a}_2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)}\left(\frac{1}{c_2}p_{12}-q_{22}\right),$$

где

$$f_i=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_i[\Phi\cos\Theta,\ldots,a_1\sin\Psi_1+a_2\sin\Psi_2,\ldots$$

$$\ldots-\Phi\Omega\sin\Theta,\ldots]\cos\Theta d\Theta d\Psi_1 d\Psi_2,$$

$$h_i=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_i[\Phi\cos\Theta,\ldots,a_1\sin\Psi_1+a_2\sin\Psi_2,\ldots$$

$$\ldots-\Phi\Omega\sin\Theta,\ldots]\sin\Theta d\Theta d\Psi_1 d\Psi_2\quad (i=1,2),$$

$$f_3=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F_3(\Phi\cos\Theta,\ldots,a_1\sin\Psi_1+a_2\sin\Psi_2\ldots)d\Theta d\Psi_1 d\Psi_2,$$

$$q_{ik}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}G_i[a_1\sin\Psi_1+a_2\sin\Psi_2,\ldots,\Phi\cos\Theta,\ldots$$

$$\ldots, -\Phi\Omega\sin\Theta, \ldots] \cos\Psi_k d\Theta d\Psi_1 d\Psi_2, \tag{13}$$

$$p_{ik} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} G_i\,[a_1\sin\Psi_1 + a_2\sin\Psi_2, \ldots, \Phi\cos\Theta, \ldots$$

$$\ldots, -\Phi\Omega\sin\Theta \ldots] \sin\Psi_k d\Theta d\Psi_1 d\Psi_2 \quad (i,\ k = 1, 2).$$

Для обеспечения наиболее интенсивного гашения нутаций параметры маятника подбираются так, чтобы частота свободной прецессии равнялась одной из собственных частот колебаний маятника, при этом в исследуемой системе имеют место следующие соотношения между частотами λ_1, λ_2 и Ω:

$$\begin{gathered} 1)\ \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_k = \Omega \quad (k = 1, 2); \\ 2)\ \lambda_2 = \frac{m}{n}\lambda_1\ (\lambda_2 > \lambda_1), \quad m\lambda_1 + n\lambda_2 + l\Omega = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

m, n и l — простые целые числа, m, n, $l = 1, 2, 3\ldots$

Если оси инерции тела не являются главными, но центробежные моменты малы $\left(\frac{I_{xy}}{I_x} \ll 1,\ \frac{I_{xy}}{I_y} \ll 1,\ \frac{I_{xz}}{I_x} \ll 1, \ldots\right)$, то методика приведения уравнений движения к стандартной форме не изменяется, но в правых частях уравнений (8) появляются дополнительные члены типа $\frac{I_{xz}}{I_x}\dot{\omega}_z$, $\frac{I_{xz}}{I_y}\omega_z^2$, $\frac{I_{xz}}{I_z}p\Phi^*\frac{1-s_2}{s_2}\sin\Theta^*$ и т. д.

При рассмотрении задачи о совместном движении вращающегося тела и системы плоских маятников невозмущенное движение симметричного тела описывается формулами (4), несимметричного тела—формулами (10), а в качестве порождающих решений, описывающих колебания маятников, принимаются выражения

$$\alpha_k = a_k\cos(\omega_k t + \xi_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

где ω_k — частоты маятников.

В этом случае приведенные к стандартной форме уравнения совместных колебательно-вращательных движений системы имеют вид:

$$\begin{gathered} \frac{d\Phi}{dt} = \mu\,[F_1\cos\Theta + F_2\sin\Theta], \\ \frac{d\delta}{dt} = \frac{\mu}{\Phi}[-F_1\sin\Theta + F_2\cos\Theta], \\ \frac{d\omega_z}{dt} = \mu F_3, \\ \frac{da_k}{dt} = \mu G_k\cos\Psi_k, \\ \frac{d\xi_k}{dt} = -\frac{\mu}{\omega_k}G_k\sin\Psi_k, \end{gathered} \tag{16}$$

где F_i и G_k ($i = 1, 2$; $k = 1, 2, \ldots, n$) — функции вида

$$F_i(\Phi\cos\Theta, -\Omega\Phi\sin\Theta, \ldots, a_1\cos\Psi_1, \ldots, a_n\cos\Psi_n, \ldots),$$

$$G_k(\Phi\cos\Theta, -\Omega\Phi\sin\Theta, \ldots, a_1\cos\Psi_1, \ldots, a_n\cos\Psi_n, \ldots).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, К., 1945.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
3. Н. В. Бутенин, Элементы теории нелинейных колебаний, Судпромгиз, 1964.
4. В. А. Гробов, Нелинейные колебания свободного твердого тела относительно центра масс, III Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике, Аннотации докладов, М., 1968.
5. Дж. Л. Синг, Классическая динамика, Физматгиз, М., 1963.
6. Г. К. Суслов, Теоретическая механика, Гостехиздат, М., 1946.
7. T. R. Alper, Analysis of pendelum damper for satellite wobble damping, J. Spacecraft Rockets, 2, 1965.
8. R. S. Teilor, A passiv pendelum wobble damping system for a manned rotating space station, AIAA — Journal, vol. 4, № 9, 1966.

Поступила 29.II 1968 г.,
после переработки — 14.V 1968 г.
Киев