УДК 519.21

О распределении величины перескока заданного уровня последовательностью максимумов случайных величин, управляемых цепью Маркова

И. И. Ежов

Пусть $\{\xi_n, \eta_n\}$ — однородная цепь Маркова со следующими вероятностями перехода за один шаг:

$$P\{\xi_{n+1} = m, \eta_{n+1} = x \mid \xi_n = k, \eta_n = x\} = F_{km}(x),$$

$$P\{\xi_{n+1} = m, \eta_{n+1} > y \mid \xi_n = k, \eta_n = x\} = \int_y^\infty dF_{km}(t) \quad (y > x), \tag{1}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N;\ m = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\{F_{km}(x)\}$ — совокупность монотонно возрастающих функций от x таких, что при каждом k $(k = 1, 2, \ldots, N)$

$$F_k(x) = \sum_{m=1}^{N} F_{km}(x)$$

— функция распределения. Последовательность $\{\eta_n\}$ назовем последовательностью максимумов случайных величин, управляемых цепью Маркова. Заметим, что если $N = 1$, $\eta_0 = -\infty$, то $\eta_n = \max(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ независимы и имеют общую функцию распределения $F_{11}(x)$. Если же $N > 1$, то

$$\vec{F}_n(z) = \vec{F}_0(z) M^n(z),$$

где

$$\vec{F}_n(z) = \{F_n(1, z), F_n(2, z), \ldots, F_n(N, z)\}, \tag{2}$$

$$F_n(k, z) = P\{\xi_n = k, \eta_n < z\} \quad (k = 1, \ldots, N),$$

а

$$M(z) = \| F_{ij}(z) \| \quad (i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, N).$$

Действительно, используя (1) и формулу полной вероятности, находим:

$$P\{\xi_n = m, \eta_n < z\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} [F_{km}(t)\chi_z(t) + \int_t^\infty \chi_z(y)\, dF_{km}(y)]\, d_t P\{\xi_{n-1} = k, \eta_{n-1} < t\}, \tag{3}$$

где

$$\chi_z(u) = \begin{cases} 1, & u < z, \\ 0, & u \geqslant z. \end{cases}$$

После очевидных преобразований равенство (3) принимает вид:

$$F_n(m, z) = \sum_{k=1}^{N} F_{km}(z) F_{n-1}(k, z). \tag{4}$$

Теперь (2) тривиально следует из (4).

Пусть $\{\xi_0, \eta_0\} = (k, x)$. Обозначим, в таком случае, через $\nu(k, x)$ тот первый момент времени, для которого справедливы неравенства:

$$\xi_{\nu(k,x)} \neq k, \ \eta_{\nu(k,x)} > x.$$

Разность

$$\eta_{\nu(k,x)} - x$$

назовем величиной перескока уровня x последовательностью $\{\eta_n\}$. Цель работы — нахождение совместного распределения $\xi_{\nu(k,x)}$ и $\eta_{\nu(k,x)} - x$.

Пусть $\{\xi_0, \eta_0\} = (m, x)$. Обозначим через $\nu_m(k, x)$ тот первый момент времени, для которого выполнены одновременно следующие неравенства:

$$\xi_{\nu_m(k,x)} \neq k, \ \eta_{\nu_m(k,x)} > x.$$

Так как $\nu_k(k, x) = \nu(k, x)$, то совместное распределение $\xi_{\nu_m(k,x)}$ и $\eta_{\nu_m(k,x)} - x$ при $m = k$ совпадает с совместным распределением $\xi_{\nu(k,x)}$ и $\eta_{\nu(k,x)} - x$. Обозначим

$$P\{\xi_{\nu_m(k,x)} = i, \ \eta_{\nu_m(k,x)} - x \geqslant z\} \qquad (i \neq k)$$

через $\Phi_m^x(k, i, z)$. Используя формулу полной вероятности, получим следующую систему интегральных уравнений для определения $\Phi_m^x(k, i, z - x) = R_m^x(k, i, z)$:

$$\begin{aligned} R_m^x(k, i, z) = \int_z^\infty dF_{mi}(y) + \int_x^\infty R_k^y(k, i, z)\, dF_{mk}(y) + \\ + \sum_{r=1}^{N} F_{mr}(x) R_r^x(k, i, z) \qquad (m = 1, 2, \ldots, N). \end{aligned} \tag{5}$$

Из (5) следует, что

$$(E - M(x)) \vec{R}^x(k, i, z) = \vec{Q}^x(k, i, z), \tag{6}$$

где E — единичная матрица, а $\vec{R}^x(k, i, z)$ и $\vec{Q}^x(k, i, z)$ — векторы-столбцы с компонентами

$$R_m^x(k, i, z) \text{ и } \int_z^\infty dF_{mi}(y) + \int_x^\infty R_k^y(k, i, z) dF_{mk}(y) \quad (m = 1, 2, \ldots, N)$$

соответственно.

Докажем, что для того чтобы существовала матрица $L(x)$, обратная к $E - M(x)$, достаточно, чтобы

$$\max_i \sum_{r=1}^{N} F_{ir}(x) = \max_i F_i(x) < 1. \tag{7}$$

Действительно, если бы

$$P(x) = \det(E - M(x)) = 0,$$

то существовало бы нетривиальное решение системы уравнений

$$z_j = \sum_i z_i F_{ij}(x). \tag{8}$$

Но из (8) следует, что

$$\sum_j |z_j| \leqslant \sum_i |z_i| \sum_j F_{ij}(x) \leqslant \max_i F_i(x) \sum_i |z_i|,$$

а это противоречит неравенству (7).

Обозначим через $L_{ik}(x)$ алгебраическое дополнение к элементу $\delta_{ik} - F_{ik}(x)$ в матрице $E - M(x)$. В таком случае из (6) следует, что

$$R_k^x(k, i, z) = \frac{1}{P(x)} \sum_{j=1}^{N} [p_{ji} - F_{ji}(z) + \int_x^\infty R_k^y(k, i, z)\, dF_{jk}(y)]\, L_{jk}(x), \tag{9}$$

$$\text{где } p_{ji} = F_{ji}(+\infty).$$

Если $F_{ik}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{ik}(t)\, dt$ для всех i и k,

то из (9) следует, что

$$\frac{\partial U_{mk}^x(i,z)}{\partial x} = -\frac{f_{mk}(x)}{P(x)} \sum_{j=1}^{N} [p_{ji} - F_{ji}(z) + U_{jk}^x(i, z)]\, L_{jk}(x) \quad (m = 1, 2, \ldots, N), \tag{10}$$

где

$$U_{mk}^x(i, z) = \int_x^\infty R_k^y(k, i, z)\, dF_{mk}(y). \tag{11}$$

Заметим, что (10) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered} \frac{\partial U_{mk}^x(i,z)}{\partial F_{mk}(x)} = -\frac{1}{P(x)} \sum_{j=1}^{N} [p_{ji} - F_{ji}(z) + U_{jk}^x(i, z)] L_{jk}(x), \\ \lim_{x \to \infty} U_{mk}^x(i, z) = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

где

$$\frac{\partial U_{mk}^x(i,z)}{\partial F_{mk}(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U_{mk}^{x+\Delta x}(i, z) - U_{mk}^x(i, z)}{F_{mk}(x + \Delta x) - F_{mk}(x)}.$$

Предположим, что (12) определяет $U_{mk}^x(i, z)$ однозначно на всей прямой (так как система уравнений линейная, то для этого достаточно потребовать, чтобы неравенство

$$\sup_x \frac{f_{mk}(x)\, |L_{jk}(x)|}{P(x)} < \infty \tag{13}$$

выполнялось для всех m и j при каждом фиксированном k). Обозначим через $\{\Gamma_{mk}^x(r, i)\}$ фундаментальную систему решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений, соответствующей неоднородной системе (10):

$$\frac{d\Gamma_{mk}^x(r, i)}{dx} = -\frac{f_{mk}(x)}{P(x)} \sum_{j=1}^{N} L_{jk}(x)\, \Gamma_{jk}^x(r, i) \quad (m = 1, \ldots, N;\ r = 1, \ldots, N), \tag{14}$$

и будем решать (10) методом вариации постоянных. Итак, пусть

$$U^x_{mk}(i,z)=\sum_{r=1}^{N} C_r\,\Gamma^x_{mk}(r,i). \tag{15}$$

Используя (10), (14), находим:

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{\partial C_r}{\partial x}\Gamma^x_{mk}(r,i)+\sum_{r=1}^{N}C_r\frac{\partial\Gamma^x_{mk}(r,i)}{\partial x}=-\frac{f_{mk}(x)}{P(x)}\sum_{j=1}^{N}[p_{ji}-F_{ji}(z)]\,L_{jk}(x)-$$

$$-\frac{f_{mk}(x)}{P(x)}\sum_{j=1}^{N}L_{jk}(x)\sum_{r=1}^{N}C_r\,\Gamma^x_{jk}(r,i)$$

или

$$\sum_{r=1}^{N}\Gamma^x_{mk}(r,i)\frac{\partial C_r}{\partial x}+\frac{f_{mk}(x)}{P(x)}\sum_{j=1}^{N}[p_{ji}-F_{ji}(z)]L_{jk}(x)=$$

$$=-\sum_{r=1}^{N}C_r\left[\frac{\partial\Gamma^x_{mk}(r,i)}{\partial x}+\frac{f_{mk}(x)}{P(x)}\sum_{j=1}^{N}L_{jk}(x)\Gamma^x_{jk}(r,i)\right]=0. \tag{16}$$

Введем обозначения:

$$-\frac{f_{mk}(x)}{P(x)}\sum_{j=1}^{N}[p_{ji}-F_{ji}(z)]\,L_{jk}(x)=V^x_{mk}(i,z). \tag{17}$$

Используя (16), получим

$$\sum_{r=1}^{N}\Gamma^x_{mk}(r,i)\,\frac{\partial C_r}{\partial x}=V^x_{mk}(i,z), \tag{18}$$

откуда

$$\frac{\partial C_r}{\partial x}=\frac{1}{E^x_{ki}}\sum_{m=1}^{N}V^x_{mk}(i,z)\,E^x_{ki}(m,r), \tag{19}$$

где E^x_{ki} — определитель Вронского, соответствующий системе уравнений (18), а $E^x_{ki}(m,r)$ — алгебраическое дополнение к $\Gamma^x_{mk}(r,i)$ в E^x_{ki}. Используя (12), (15), (19), находим

$$U^x_{mk}(i,z)=\sum_{r=1}^{N}\Gamma^x_{mk}(r,i)\left[B_r+\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{E^t_{ki}}\sum_{m=1}^{N}V^t_{mk}(i,z)\,E^t_{ki}(m,r)\,dt\right], \tag{20}$$

где B_r $(r=1,2,\ldots,N)$ находятся из условий:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{r=1}^{N}\Gamma^x_{mk}(r,i)\left[B_r+\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{E^t_{ki}}\sum_{m=1}^{N}V^t_{mk}(i,z)\,E^t_{ki}(m,r)\,dt\right]=0\quad(m=1,\ldots,N). \tag{21}$$

Используя теперь (11) и связь $\Phi_k^x(k,i,z)$ с $R_k^x(k,i,z)$, получим

$$\begin{aligned}\Phi_k^x(k,i,z) &= P\{\xi_{\nu(k,x)} = i,\ \eta_{\nu(k,x)} - x \geqslant z\} = \\ &= -\frac{1}{f_{mk}(x)} \frac{\partial U_{mk}^x(i,t)}{\partial x}\bigg|_{t=x+z}.\end{aligned} \tag{22}$$

Заметим, что $R_m^x(k,i,z)$, а значит и $\Phi_m^x(k,i,z)$, после того, как известна $U_{mk}^x(i,z)$, легко определяются из (5):

$$\sum_{r=1}^{N} [\delta_{mr} - F_{mr}(x)]\, R_r^x(k,i,z) = [p_{mi} - F_{mi}(z)] + U_{mk}^x(i,z) \quad (m = 1, 2, \ldots, N). \tag{23}$$

Отметим, что если (13) не выполняется, то ввиду (21) предложенное решение системы (12), вообще говоря, неверно. Покажем как в этом случае можно определить

$$P\{\eta_{\nu(k,x)} - x \geqslant z\} = \sum_{i \neq k} \Phi_k^x(k,i,z) = \Phi_k^x(z). \tag{24}$$

Введем обозначение

$$\sum_{i \neq k} U_{mk}^x(i,z) = \int_x^\infty \sum_{i \neq k} R_k^y(k,i,z)\, dF_{mk}(y) = U_{mk}^x(z). \tag{25}$$

Из (10) следует, что

$$\frac{\partial U_{mk}^x(z)}{\partial x} = -\frac{f_{mk}(x)}{P(x)} \sum_{j=1}^{N} [1 - F_j(z) - p_{jk} + F_{jk}(z) + U_{jk}^x(z)]\, L_{jk}(x) \tag{26}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, N).$$

Так как

$$\sum_{i \neq k} R_k^y(k,i,z) = \sum_{i \neq k} \Phi_k^y(k,i,z-y) = P\{\eta_{\nu(k,y)} - y \geqslant z - y\},$$

то из (25) следует, что

$$U_{mk}^x(z)\,|_{x=z} = p_{mk} - F_{mk}(z) \quad (m = 1, 2, \ldots, N). \tag{27}$$

Итак, $U_{mk}^x(z)$ $(m = 1, 2, \ldots, N)$ — решение системы линейных дифференциальных уравнений (26) с граничными условиями (27). Теперь уже можно утверждать, что (26), (27) определяет $U_{mk}^x(z)$ однозначно в любом интервале $[a, b]$, для которого выполнены неравенства:

$$a \leqslant z \leqslant b,$$

$$\max_{m,j} \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \frac{f_{mk}(x)\,|L_{jk}(x)|}{P(x)} = K < \infty. \tag{28}$$

Если $f_{mk}(x)$ непрерывны при всех m и k, то второе неравенство выполняется автоматически в любом замкнутом интервале, как только в этом интервале будет справедливо неравенство (7). После того, как $U_{mk}^x(z)$

найдены, определение $\Phi_k^x(z)$ не представляет трудностей. Это можно сделать точно так же, как и выше, когда $\Phi_k^x(k, i, z)$ определялась по $U_{mk}^x(i,z)$.

В заключение рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $N=1$. В этом случае

$$P\{\eta_{\nu(1,x)} - x > z\} = \frac{1 - F_{11}(x+z)}{1 - F_{11}(x)}.$$

Кроме того, если $\nu_0 = 0$ и

$$\nu_{k+1} = \eta(1, \nu_k) \ (k = 0, 1, \ldots),$$

то $\{\nu_k\}$ совпадает с последовательными моментами скачков пуассоновского процесса $\xi(t)$, для которого

$$M\xi(t) = -\ln[1 - F_{11}(t)].$$

В общем же случае совокупность функций

$$\Phi_k^x(k, i, z), \quad i \neq k \ (k = 1, 2, \ldots, N)$$

определяет неоднородный во времени полумарковский процесс $\{\xi(t), \eta(t)\}$. А именно: если $\xi(t) = k$ и $\xi(t-0) \neq k$, то $\Phi_k^t(k, i, z)$ — вероятность того, что $\xi(t)$, находясь в состоянии k время не меньшее z, перейдет затем в состояние i $(i \neq k)$.

Пример 2. $N = 2$, $F_{11}(x) = F_{22}(x) = 0$, $F_{12}(x) = F_1(x)$, $F_{21}(x) = F_2(x)$. В этом случае система уравнений (10) допускает решение в явном виде (считаем, что $F_1(x) = F_2(x) = 0$ для $x \leqslant 0$):

$$\Phi_1^x(1, 2, z) = \frac{1 - F_1(z+x)}{1 - F_1(x)F_2(x)} + \frac{F_1(x)[1 - F_2(x+z)]}{1 - F_1(x)F_2(x)} \times$$

$$\times \exp\left\{\int_x^{x+z} \frac{F_1(t)\,dF_2(t)}{1 - F_1(t)F_2(t)}\right\} + \frac{F_1(x)[1 - F_1(z+x)]}{1 - F_1(x)F_2(x)} \int_x^{z+x} \frac{dF_2(t)}{1 - F_1(t)F_2(t)} \times \tag{29}$$

$$\times \exp\left\{\int_x^t \frac{F_1(u)\,dF_2(u)}{1 - F_1(u)F_2(u)}\right\};$$

$\Phi_2^x(2, 1, z)$ совпадает с правой частью (29) после замены $F_1(t)$ на $F_2(t)$, а $F_2(t)$ на $F_1(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. І. І. Єжов, Деякі граничні теореми для послідовності максимумів незалежних випадкових величин, ДАН УРСР, № 11, 1964.

Поступила 16.I 1968 г.

Киевский государственный университет