УДК 517.948.32

О приближенном решении характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта методом осреднения функциональных поправок

В. Г. Иваницкий

Рассматривается характеристическое сингулярное интегральное уравнение

$$K_0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) - \frac{b(t)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \tag{1}$$

Если $a(t)$, $b(t)$, $f(t) \in H(\alpha)$, то решение неоднородного характеристического уравнения (1) можно получить путем решения краевой задачи Гильберта.

Различают три случая:

1) $\varkappa = 0$. Решение уравнения (1) дается формулой

$$\varphi(t) = \beta_0\xi(t) + \eta(t)f(t)e^{\omega_1(t)} - \xi(t)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)e^{\omega_1(\tau)}\operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}\,d\tau, \tag{2}$$

где

$$\varkappa = \operatorname{Ind}[a(t) + ib(t)],$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\arg\frac{b(t)}{a(t)} - \varkappa\tau\right]\frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z}\,d\tau,$$

$$\gamma(z) = \omega(x, y) + i\omega_1(x, y),\ is^{\varkappa}e^{i\gamma(s)} = \xi(t) + i\eta(t),\ s = e^{it},$$

β_0 — const определяется дополнительным условием.

2) $\varkappa > 0$. Решение дается формулой

$$\varphi(t) = \eta(t)f(t)e^{\omega_1(t)} - \xi(t)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)e^{\omega_1(\tau)}\operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}\,d\tau +$$

$$+ \xi(t)\left[\beta_0 + 2\sum_{k=1}^{\varkappa}(a_k\sin kt + \beta_k\cos kt)\right]. \tag{3}$$

3) $\varkappa < 0$. Уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены $-2\varkappa$ условий разрешимости, и его решение дается формулой

$$\varphi(t) = \eta(t)f(t)e^{\omega_1(t)} - \xi(t)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)e^{\omega_1(\tau)}\operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}\,d\tau. \tag{4}$$

Нахождение решения характеристического уравнения в замкнутой форме не всегда является легкой задачей, потому что нужно знать $\eta(t)$, $\omega_1(t)$, $\xi(t)$.

Решение уравнения (1) легко получить только в том случае, когда

$$\varkappa = 0 \text{ и } \frac{b(t)}{a(t)} = \text{const} = k.$$

А поэтому целесообразно рассматривать вопросы о приближенном решении характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта.

Обзор методов приближенного решения сингулярных интегральных уравнений дается в [1].

Здесь же для решения характеристического уравнения используется метод осреднения функциональных поправок [2].

1. Построение алгоритма. Пусть $a(t) = 1$. Тогда уравнение (1) приобретает вид:

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{b(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Функции $f(t)$, $b(t)$, входящие в уравнение (5), принадлежат пространству $L_2(0,2\pi)$, а сингулярный интеграл рассматривается как оператор в этом же пространстве.

Пусть $\varphi_0(t)$ — произвольный элемент пространства $L_2(0,2\pi)$. Последовательные приближения определяем из соотношений

$$\varphi_n(t) = f(t) + \frac{b(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} [\varphi_{n-1}(\tau) + \alpha_n(\tau)]\, d\tau; \tag{6}$$

$$\alpha_n(t) = \sum_{l=1}^{k} c_{nl} \psi_l(t), \tag{7}$$

где $\{\psi_l(t)\}$ — система линейно независимых функций, принадлежащая пространству $L_2(0,2\pi)$, а коэффициенты c_{nl} определяются из условий

$$\int_0^{2\pi} \{\alpha_n(t) - \delta_n(t)\} \overline{\psi_l(t)}\, dt = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{8}$$

$$\delta_n(t) = \varphi_n(t) - \varphi_{n-1}(t) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

В случае, когда система функций $\{\psi_l(t)\}$ — ортонормированная, коэффициенты c_{nl} определяются таким соотношением

$$c_{nl} = \int_0^{2\pi} \overline{\psi_l(t)}\, \delta_n(t)\, dt. \tag{9}$$

Иногда могут быть полезными такие формулы

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} \sin k\tau d\tau = \cos kt;$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} \cos k\tau d\tau = -\sin kt.$$

2. Доказательство сходимости процесса и оценка погрешности. Норма сингулярного интегрального опе-

ратора с ядром Гильберта в пространстве $L_2(0,2\pi)$ не превышает единицы [3]

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\,\varphi(\tau)\,d\tau;$$

$$\int_0^{2\pi}|\psi^2(t)|\,dt\leqslant\int_0^{2\pi}|\varphi^2(t)|\,dt,$$

где

$$\|\varphi\|^2=\int_0^{2\pi}|\varphi^2(s)|\,ds.$$

Используя соотношение (6), $\delta_n(t)$ можно представить в таком виде

$$\delta_n(t)=\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)=\frac{b(t)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\,[\delta_{n-1}(\tau)-\alpha_{n-1}(\tau)+\alpha_n(\tau)]\,d\tau. \quad (10)$$

На основании того, что в пространстве Гильберта справедливо соотношение

$$\left(\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t),\ \delta_n(t)-\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)\right)=\left(\delta_n(t)-\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t),\ \sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)\right)=0,$$

имеем

$$\|\delta_n(t)\|^2=\|\delta_n(t)-\alpha_n(t)\|^2+\|\alpha_n(t)\|^2, \quad (11)$$

так как

$$\|\delta_n(t)\|^2=\|\delta_n(t)+\alpha_n(t)-\alpha_n(t)\|^2=\|\delta_n(t)+\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)-\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)\|^2=$$

$$=\left|\left(\left\{\delta_n(t)-\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)\right\}+\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t),\ \left\{\delta_n(t)-\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)\right\}+\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)\right|=$$

$$=\left|\left(\delta_n(t)-\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t),\ \delta_n(t)-\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)\right)+\right.$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t),\ \delta_n(t)-\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)\right)+$$

$$\left.+\left(\delta_n(t)-\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t),\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)\right)+\left(\sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t),\ \sum_{i=1}^{k}c_{ni}\psi_i(t)\right)\right|.$$

Аналогично доказывается справедливость соотношения

$$\|\delta_{n-1}(t)+\alpha_n(t)-\alpha_{n-1}(t)\|^2=\|\delta_{n-1}(t)-\alpha_{n-1}(t)\|^2+\|\alpha_n(t)\|^2. \quad (12)$$

Используя (11), (12), из (10) получаем

$$\|\delta_n(t)-\alpha_n(t)\|^2+\|\alpha_n(t)\|^2\leqslant\|b(t)\|^2\{\|\alpha_n(t)\|^2+\|\delta_{n-1}(t)-\alpha_{n-1}(t)\|^2\}. \quad (13)$$

Если $\|b(t)\|<1$ (следовательно $1-\|b(t)\|^2>0$), то неравенство (13) можно усилить

$$\|\delta_n(t)-\alpha_n(t)\|<\|b(t)\|\,\|\delta_{n-1}(t)-\alpha_{n-1}(t)\|\leqslant\|b(t)\|^{n-1}\,\|\delta_1(t)-\alpha_1(t)\|. \quad (14)$$

Пусть $\Delta_n(t) = \varphi(t) - \varphi_n(t)$, где $\varphi(t)$ и $\varphi_n(t)$ соответственно точное и приближенное решения уравнения (5). Тогда $\Delta_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_n(t) = \frac{b(t)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}\,[\Delta_n(\tau) + \delta_n(\tau) - \alpha_n(\tau)]\,d\tau, \tag{15}$$

откуда

$$\|\Delta_n(t)\| \leqslant \|b(t)\|\,\{\|\Delta_n(t)\| + \|\delta_n(t) - \alpha_n(t)\|\}. \tag{*}$$

Из (*) имеем

$$\|\Delta_n(t)\| \leqslant \frac{1}{1 - \|b(t)\|}\,\|b(t)\|\,\|\delta_n(t) - \alpha_n(t)\|. \tag{16}$$

Из (16) видно, что при $n \to \infty$ $\|\Delta_n(t)\|$ стремится к нулю, т. е. последовательность (6) при любом k сходится к решению уравнения (5).

Теорема. *Если выполнено $\|b(t)\| < 1$, то при любом $f(t) \in L_2(0,2\pi)$ существует единственное решение уравнения* (5) *и последовательность* (6) *сходится к этому решению, причем имеет место оценка погрешности* (16).

Примечание. Если выполнено условие $\|b(t)\| < 1$, то уравнение (5) можно решать методом последовательных приближений.

В [4] показано, что трансформация Гильберта в $L_2[-1,1]$ ограничена, и если $\varphi(t) \in L_2[-1,1]$, то

$$\left\| \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \right\| \leqslant \|\varphi(t)\|.$$

Поэтому к характеристическому сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = f(t), \tag{17}$$

где $b(t),\ f(t) \in L_2[-1,1]$, $\|b(t)\| < 1$, можно применить метод осреднения функциональных поправок.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(t) + \frac{\cos t}{4\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}\,\varphi(\tau)\,d\tau = 10\sin t + \sin 2t + 5\cos^2 t + \frac{\cos t\cos 2t}{2},$$

которое имеет точное решение $\varphi(t) = 10\sin t + \sin 2t$.

Пусть $\psi_1(t) = \sin t$ и $\varphi_0(t) = \sin t$. Решаем это уравнение изложенным методом.

$$\alpha_1(t) = c_1 \sin t;$$

$$\varphi_1(t) = 10\sin t + \sin 2t + 5\cos^2 t + \frac{\cos t\cos 2t}{2} - \frac{\cos t}{4\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}\,[\varphi_0(\tau) +$$

$$+ c_1 \sin \varepsilon]\,d\tau = 10\sin t + \sin 2t + \frac{9}{2}\cos^2 t + \frac{\cos t\cos 2t}{2} - c_1\frac{\cos^2 t}{2};$$

$$\delta_1(t) = \varphi_1(t) - \varphi_0(t) = 9\sin t + \sin 2t + \frac{\cos t\cos 2t}{2} - c_1\frac{\cos^2 t}{2};$$

$$\int_0^{2\pi} \{c_1 \sin t - \delta_1(t)\} \sin t dt = 0;$$

$$\pi c_1 - 9\pi = 0, \quad c_1 = 9.$$

Следовательно, в первом приближении имеем

$$\varphi_1(t) = 10 \sin t + \sin 2t + \frac{\cos t \cos 2t}{2}.$$

Таблица 1

	$\varphi(t)$	$\varphi_1(t)$	$\varphi_2(t)$	$\varphi(t)-\varphi_1(t)$	$\varphi(t)-\varphi_2(t)$
0	0,00000	0,50000	0,00000	—0,50000	0,00000
$\frac{\pi}{3}$	9,52259	9,39759	9,57669	0,12500	—0,05410
$\frac{\pi}{2}$	10,00000	10,00000	10,00000	0,00000	0,00000
$\frac{2}{3}\pi$	7,79121	7,91621	7,73711	—0,12500	0,05410
π	0,00000	—0,50000	0,00000	0,50000	0,00000
$\frac{4}{3}\pi$	—7,79121	—7,66621	—7,73711	—0,12500	—0,05410
$\frac{3}{2}\pi$	—10,00000	—10,00000	—10,00000	0,00000	0,00000
$\frac{5}{3}\pi$	—9,52259	—9,64759	—9,57669	0,12500	0,05410
2π	0,00000	0,50000	0,00000	—0,50000	0,00000

Во втором приближении согласно тем же формулам имеем

$$\alpha_2(t) = c_2 \sin t;$$

$$\varphi_2(t) = 10 \sin t + \sin 2t + 5 \cos^2 t + \frac{\cos t \cos 2t}{2} - \frac{\cos t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} \times$$

$$\times [\varphi_1(\tau) + c_2 \sin \tau] d\tau = 10 \sin t + \sin 2t + \frac{\cos t}{8} (\sin t + \sin 3t) - c_2 \frac{\cos^2 t}{2};$$

$$\delta_2(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \frac{\cos t}{8} (\sin t + \sin 3t) - \frac{\cos t \cos 2t}{2} - c_2 \frac{\cos^2 t}{2};$$

$$\int_0^{2\pi} \{c_2 \sin t - \delta_2(t)\} \sin t dt = 0; \quad \pi c_2 = 0, \quad c_2 = 0;$$

$$\varphi_2(t) = 10 \sin t + \sin 2t + \frac{1}{8} (\sin t + \sin 3t).$$

Табл. 1, 2, где через $\overline{\varphi}_n(t)$ обозначены приближения, полученные методом последовательных приближений, дают возможность сравнить результаты, полученные методом осреднения функциональных поправок и методом последовательных приближений.

В нашем примере только в первом приближении функциональная поправка не равна нулю, а дальше все $c_l = 0$.

Но за счет функциональной поправки в первом приближении результаты лучше, чем в методе последовательных приближений. Из табл. 1, 2

Таблица 2

	$\varphi(t)$	$\overline{\varphi}_1(t)$	$\overline{\varphi}_2(t)$	$\overline{\varphi}_3(t)$	$\overline{\varphi}(t)-\overline{\varphi}_1(t)$	$\varphi(t)-\overline{\varphi}_2(t)$	$\varphi(t)-\overline{\varphi}_3(t)$
0	0,00000	5,00000	0,00000	−0,08203	−5,00000	0,00000	0,08203
$\frac{\pi}{3}$	9,52259	10,52259	9,63756	9,53870	−1,00000	−0,11497	−0,01611
$\frac{\pi}{2}$	10,00000	10,00000	10,00000	10,00000	0,00000	0,00000	0,00000
$\frac{2}{3}\pi$	7,79121	9,04121	7,79797	7,78389	−1,25000	−0,00676	0,00732
π	0,00000	4,00000	0,00000	−0,05079	−4,00000	0,00000	0,05079
$\frac{4}{3}\pi$	−7,79121	−6,54121	7,79797	−7,80732	−1,25000	0,00676	0,01611
$\frac{3}{2}\pi$	−10,00000	−10,00000	−10,00000	−10,00000	0,00000	0,00000	0,00000
$\frac{5}{3}\pi$	−9,52259	−8,52259	−9,63756	−9,50648	−1,00000	0,11497	−0,01611
2π	0,00000	5,00000	0,00000	−0,08203	−5,00000	0,00000	0,08203

видно, что n-е приближение, полученное методом осреднения функциональных поправок, дает лучшую точность, чем $n+1$-е приближение, полученное по методу последовательных приближений, причем количество вычислений меньше, чем это нужно выполнить для отыскания $n+1$-го приближения в методе последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Иванов, Метод приближенного решения сингулярных интегральных уравнений, Сб. Математический анализ 1963, Итоги науки, ВИНИТИ, М., 1965.
2. А. Ю. Лучка, Теория и применение метода осреднения функциональных поправок, Изд-во АН УССР, К., 1963.
3. С. Г. Михлин, Сингулярные интегральные уравнения, УМН, т. 3, вып. 3 (25), 1948.
4. И. Д. Софронов, О некоторых свойствах сингулярных операторов и решений сингулярных интегральных уравнений, ДАН СССР, т. 110, № 6, 1956.

Поступила 27.II 1967 г.

Институт математики АН УССР