УДК 519.21

Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний

В. С. Королюк

В работе [1] приведена предельная теорема для распределения времени пребывания в подмножестве состояний полумарковского процесса, вероятностные характеристики которого зависят от некоторого малого параметра

ε таким образом, что вместе с ε стремится к нулю вероятность выхода из данного подмножества. Тогда при соответствующей нормировке предельное распределение будет показательным.

В настоящей заметке строится асимптотическое разложение по степеням малого параметра ε производящей функции времени пребывания полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний. При этом используется алгоритм построения асимптотических разложений в задачах возмущения матриц на спектре [2].

Пусть полумарковский процесс определен на конечном множестве состояний $E = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ матрицей вероятностей перехода $\{P^{\varepsilon}_{ij}(t); i, j \in \in E\}$.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

1) нулевое состояние поглощающее, т. е. $P^{\varepsilon}_{0j}(t) \equiv 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$;

2) вероятности перехода $P^{\varepsilon}_{ij}(t)$ зависят от малого параметра следующим образом:

$$P^{\varepsilon}_{ij}(t) = p^{\varepsilon}_{ij} F_{ij}(t/\varepsilon), \tag{1}$$

$$p^{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} p_{ij} - \varepsilon q_{ij}, & 1 \leqslant i, j \leqslant n; \\ \varepsilon q_{i0}, & 1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases} \tag{2}$$

причем $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Так что $\sum\limits_{j=1}^{n} q_{ij} = q_{i0}$;

3) функции распределения $F_{ij}(t)$ удовлетворяют условию Крамера при некотором $s > 0$: $\int\limits_0^{\infty} e^{st} dF_{ij}(t) < \infty$;

4) цепь Маркова, определяемая матрицей переходных вероятностей $\{p_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$, эргодическая со стационарным распределением $\{\varrho_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Определим τ^{ε}_i — времена пребывания полумарковского процесса в подмножестве $E_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$, начиная с i-го состояния. Пусть $\varphi^{\varepsilon}_i(s) = = Me^{-s\tau^{\varepsilon}_i}$.

Известно (см., например, [3]), что производящие функции $\varphi^{\varepsilon}_i(s)$ определяются следующей системой алгебраических уравнений:

$$\varphi^{\varepsilon}_i(s) - \sum_{j=1}^{n} p^{\varepsilon}_{ij}(s) \varphi^{\varepsilon}_j(s) = \varepsilon q_{i0} f_{i0}(\varepsilon s), \tag{3}$$

в которой (см. условие 2))

$$p^{\varepsilon}_{ij}(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} dP^{\varepsilon}_{ij}(t) = (p_{ij} - \varepsilon q_{ij}) f_{ij}(\varepsilon s), \tag{4}$$

а функции $f_{ij}(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} dF_{ij}(t)$ разлагаются в ряд по степеням s (см. условие 3)):

$$f_{ij}(\varepsilon s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-\varepsilon s)^k a^{(k)}_{ij}. \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в (3), после несложных преобразований придем к следующей системе уравнений:

$$\varphi_i^\varepsilon(s)-\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\varphi_j^\varepsilon(s)+\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}(-\varepsilon s)^{k-1}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(k)}(s)\,\varphi_j^\varepsilon(s)=\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}(-\varepsilon s)^{k}b_{i0}^{(k)}. \tag{6}$$

Здесь

$$b_{ij}^{(k)}(s)=q_{ij}a_{ij}^{(k-1)}+sp_{ij}a_{ij}^{(k)},\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant n;$$
$$b_{i0}^{(k)}=q_{i0}a_{i0}^{(k)},\quad 1\leqslant i\leqslant n;\quad a_{ij}^{(0)}\equiv 1. \tag{7}$$

Вводя очевидным образом соответствующие векторы и матрицы, перепишем систему (6) в матричном виде:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})\,\varphi^\varepsilon+\varepsilon\mathbf{B}_1\varphi^\varepsilon-\varepsilon^2 s\mathbf{B}_2\varphi^\varepsilon+\ldots+\varepsilon^k(-s)^{k-1}\mathbf{B}_k\varphi^\varepsilon+\ldots=$$
$$=\varepsilon b_0^{(0)}-\varepsilon^2 s b_0^{(1)}+\ldots+\varepsilon^k(-s)^{k-1}b_0^{(k-1)}+\ldots \tag{8}$$

По условию 4) матрица $\mathbf{P}$ имеет единицу простым собственным числом. Следовательно, мы пришли к задаче о возмущении матрицы на спектре. Применяя алгоритм построения асимптотического ряда, изложенный в работе [2], получим асимптотическое разложение решения уравнения (8).

Т е о р е м а. *При выполнении условий 1) — 4) имеет место асимптотическое разложение производящих функций времен достижения поглощающего состояния полумарковского процесса $\varphi_i^\varepsilon(s)=\mathbf{M}e^{-s\tau_i^\varepsilon}$ в каждом конечном интервале по* s:

$$\varphi_i^\varepsilon(s)=\frac{\lambda}{\lambda+s}+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\varphi_{ik}(s), \tag{9}$$

в котором

$$\lambda=\frac{q}{a};\ q=\sum_{i=1}^{n}\varrho_i q_{i0};\quad a=\sum_{i=1}^{n}\varrho_i a_i;\quad a_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}a_{ij}; \tag{10}$$

векторы $\varphi_k(s)=(\varphi_{1k}(s),\ldots,\varphi_{nk}(s))$ *определяются из рекуррентной системы алгебраических уравнений с дополнительными условиями ортогональности, обеспечивающими существование решения последующих уравнений.*

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})\,\varphi_1(s)=\frac{s}{\lambda+s}\left(b_0^{(0)}-\lambda a^{(1)}\right) \tag{11}$$

с условием

$$\varrho\mathbf{B}_1\varphi_1=s\left(\varrho\mathbf{B}_2\varphi_0+\varrho b_0^{(1)}\right), \tag{12}$$

а при $k\geqslant 2$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P})\,\varphi_k=\mathbf{B}_1\varphi_{k-1}-s\mathbf{B}_2\varphi_{k-2}+\ldots+(-s)^{k-2}\mathbf{B}_{k-1}\varphi_1+$$
$$+(-s)^{k-1}\mathbf{B}_k\varphi_0+(-s)^{k-1}b_0^{(k-1)} \tag{13}$$

с условием

$$\varrho\mathbf{B}_1\varphi_k=\varrho\left(s\mathbf{B}_2\varphi_{k-1}+\ldots+(-s)^k\mathbf{B}_k\varphi_1+(-s)^{k-1}\mathbf{B}_{k+1}\varphi_0+(-s)^k b_0^{(k)}\right). \tag{14}$$

Здесь введены обозначения векторов:

$$\varphi_0 = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}, \frac{\lambda}{\lambda + s}, \ldots, \frac{\lambda}{\lambda + s} \right); \quad a^{(1)} = (a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{15}$$

Полученный асимптотический ряд (9) можно дифференцировать по s, получая таким образом асимптотические разложения для моментов времени достижения поглощающего состояния. Однако непосредственное построение асимптотических разложений для моментов, исходя из соответствующих уравнений для них, значительно проще. Например, для $m_i^\varepsilon = \mathbf{M}\tau_i^\varepsilon$ имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$m_i^\varepsilon - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^\varepsilon m_j^\varepsilon = \varepsilon a_i. \tag{16}$$

Учитывая условие 2), эту систему перепишем в матричном виде:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\, m^\varepsilon + \varepsilon Q m^\varepsilon = \varepsilon a^{(1)}. \tag{17}$$

Применяя к этой системе алгоритм работы [2], получим асимптотическое разложение для вектора $m^\varepsilon = (m_1^\varepsilon, \ldots, m_n^\varepsilon)$:

$$m^\varepsilon = M + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k m_k, \tag{18}$$

в котором вектор M имеет все одинаковые компоненты:

$$M_i = \frac{a}{q}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \tag{19}$$

а векторы m_k находятся из рекуррентной системы уравнений с дополнительными условиями:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\, m_1 = a^{(1)} - \frac{a}{q} q^{(0)}; \quad \varrho Q m_1 = 0; \tag{20}$$

при $k \geqslant 2$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\, m_k = -\mathbf{Q} m_{k-1} \tag{21}$$

с условием

$$\varrho \mathbf{Q} m_k = 0. \tag{22}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. С. Королюк, Л. И. Полищук, А. А. Томусяк, Об одной предельной теореме для полумарковских процессов, Кибернетика,
2. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений.I , УМН, т. 15, вып. 3, 1960.
3. В. С. Королюк, Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний, УМЖ, т. 17, № 3, 1965.

Поступила 28.IV 1969 г.

Институт математики АН УССР