УДК 517.473

О разложении по собственным функциям самосопряженного оператора, порожденного дифференциальным выражением и псевдодифференциальными граничными условиями

С. О. Рущицкая

Следуя методике, разработанной Ю. М. Березанским для разложения по собственным функциям самосопряженного оператора [1—3] (см. также [4]), в заметке строится такое разложение для самосопряженного оператора, порожденного дифференциальным выражением и псевдодифференциальными граничными условиями [5]. Так же как и в случае эллиптических дифференциальных операторов [2—4, 6, 7], оказалось возможным использовать теорему о повышении гладкости решений рассматриваемой задачи [8] для изучения поведения спектральной и собственных функций вблизи границы области.

Отметим, что расположение спектра для оператора Лапласа и специальных нелокальных граничных условий изучалось в работах [9, 10].

1. Пусть область $G \subset R^n$ является внешностью или внутренностью некоторой замкнутой достаточно гладкой ограниченной поверхности Γ, которая служит границей этой области. Рассмотрим в G эллиптическое дифференциальное выражение L порядка $r = 2m$, а на Γ — псевдодифференциальные граничные условия, которые после распрямления Γ в окрестности любой ее точки имеют вид

$$B_j u = \sum_{k=0}^{m_j} B_{jk} D_n^k u \quad (m_j < 2m,\ j = 1, \dots, m)$$

(B_{jk} — псевдодифференциальные операторы порядка $m_j - k$).

Пусть граничные условия определяют некоторое подпространство $H_r(\text{гр})$ [11] соболевского пространства $H_r(G)$. В случае неограниченной области $u \in H_r(\text{гр})$ обозначает, что u удовлетворяет граничным условиям и финитна на бесконечности.

Сильным оператором $\Lambda(\text{гр})$ называют замыкание в $L_2(G)$ отображения $\Lambda'(\text{гр})$: $u \to Lu$ ($u \in \dot{H}_r$ (гр)). Пусть $\Lambda^+(\text{гр})^+$ — сильный оператор, построенный по L^+ и $(\text{гр})^+$ (соответственно сопряженные к L и (гр) [5]), тогда $Л(\text{гр}) = (\Lambda^+(\text{гр})^+)^*$ является слабым оператором. Очевидно, $\Lambda(\text{гр}) \subseteq Л^+(\text{гр})$.

Понятно, что при $L = L^+$ и $(\text{гр}) = (\text{гр})^+$ $\Lambda'(\text{гр})$, как оператор в $L_2(G)$, будет эрмитовым. Вообще говоря, $\Lambda'(\text{гр})$ не является замкнутым оператором. Однако, это имеет место при некоторых предположениях относительно G, L и (гр).

Теорема 1. *Пусть $L = L^+$ — эллиптический гладкий в ограниченной области $\bar{G}$ оператор порядка r, на Γ заданы достаточно гладкие однородные самосопряженные псевдодифференциальные граничные условия. Тогда оператор $\Lambda'(\text{гр}) = \Lambda(\text{гр})$ является самосопряженным.*

Действительно, из теоремы о повышении гладкости решений вплоть до границы области (теорема 6 [8] при $G_0 = G$, $\Gamma_0 = \Gamma$) следует, что $\mathfrak{D}(Л(\text{гр})) = H_r(\text{гр})$. По определению $\dot{H}_r(\text{гр}) = \mathfrak{D}(Л(\text{гр}))$, но $\Lambda'(\text{гр}) \subseteq \subseteq Л(\text{гр})$, поэтому $\Lambda'(\text{гр}) = Л(\text{гр})$, т. е. является замкнутым, самосопряженным оператором.

2. В произвольной области G и на ее границе Γ рассмотрим самосопряженные выражения $L = L^+$ и $(\text{гр}) = (\text{гр})^+$ такие как и в п. 1. Сильный оператор $\Lambda(\text{гр})$ является эрмитовым замкнутым оператором в $L_2(G)$. Пусть A некоторое его самосопряженное расширение в $L_2(G)$, $E(\Delta)$—соответствующее A обычное или обобщенное разложение единицы и $\gamma(\lambda)$—некоторая непрерывная ограниченная функция, определенная на спектре A.

Предложение 1 [12, 13]. Пусть L достаточно гладко. Тогда обобщенная функция $\gamma(A)$ оператора A, где $\gamma(\lambda)=\frac{1}{\lambda^N-z}$, $N=\left[\frac{n}{2r}\right]+1$, $\operatorname{Im} z\neq 0$ ($[t]$ — наибольшее целое, не превосходящее t), является интегральным оператором с достаточно гладким ядром $C(x, y)$. $\int_G |\overline{C}(x, y)|^2 dy$, $\int_G |C(x, y)|^2 dx$ ограничены при x, y, меняющихся строго внутри G и ограниченных.

Доказательство (как и в [4]) следует из того, что при любом $f\in L_2(G)$ $\gamma(A)f$ и $(\gamma(A))^*f$ являются обобщенными решениями внутри G соответственно уравнений $(L^N-zE)\,u=f$ и $(L^N-zE)^+u=f$ и поэтому $\gamma(A)$ является интегральным оператором, ядро которого имеет указанную гладкость.

Отсюда A — карлемановский оператор в $L_2(G)=L_2(G, dx)$ ($G\subseteq R_n$ — локально компактно). Поэтому возможно разложение по собственным функциям оператора A, если подобрано $1\leqslant p(y)\in C^\infty(G)$ такое, что

$$\int_G\int_G |C(x, y)|^2 \frac{1}{p(y)}\, dxdy<\infty. \tag{1}$$

Тогда разложение можно строить, используя цепочку вида

$$L_2(G, p^{-1}dx)\supseteq L_2(G, dx)\supseteq L_2(G, pdx). \tag{2}$$

Строим продолжение оснащения оператора A (см. [3, 4]), выбирая в качестве Д $H_{r,0}(G)\subset H_r$ (гр) $\cap H_{r,0}(R_n)\subset \mathfrak{D}(A)$ с топологией, определяемой, например, скалярным произведением $(u, v)_{\text{Д}}=(u, v)_{L_2(G,pdx)}+(Au, Av)_{L_2(G,pdx)}$. Так как $H_{r,0}(G)$ (как совокупность всех финитных относительно G, ∞ функций из $H_r(G)$) плотно в $L_2(G, pdx)$ и A непрерывно действует из Д в $L_2(G, pdx)$, то такой выбор законен.

Итак, обобщенная собственная функция φ оператора A, отвечающая вещественному собственному значению λ, является обычной функцией $\varphi(x)\in L_2(G, p^{-1}dx)$ такой, что при каждом $v\in H_{r,0}(G)$ $(\varphi, (L-\lambda E)\,v)_0=0$.

Теорема 2 [4]. *При принятых выше предположениях относительно* G, L, (гр) *и указанном выборе* A *и* $1\leqslant p(x)\in C^\infty(G)$ *имеют место следующие утверждения: оператор обобщенного проектирования* $P(\lambda)$ *на обобщенное собственное подпространство является интегральным оператором*

$$(P(\lambda)\,u)(x)=\int_G \Phi(x, y, \lambda)\,u(y)\,dy\quad (u\in L_2(G, pdx)), \tag{3}$$

где спектральное ядро $\Phi(x, y, \lambda)$ $(x, y\in G)$ *оператора* A *входит в* $L_2(G\times G, p^{-1}(x)\,p^{-1}(y)\,dxdy)$. *Кроме того, оно достаточно гладко (существуют и непрерывны по* $(x, y)\in G\times G$ *все производные вида* $D_x^\alpha D_y^\beta$; $|\alpha|, |\beta|\leqslant r+n+p$) *и по каждому из переменных является собственной функцией:*

$$\begin{aligned} L_x\Phi(x, y, \lambda)&=\lambda\Phi(x, y, \lambda),\\ \overline{L}_y\Phi(x, y, \lambda)&=\lambda\Phi(x, y, \lambda). \end{aligned} \tag{4}$$

Разложение ядра по собственным функциям

$$\Phi(x, y, \lambda)=\sum_{\alpha=1}^{N_\lambda} \varphi_\alpha(x, \lambda)\,\overline{\varphi_\alpha(y, \lambda)}\quad (x, y\in G) \tag{5}$$

сходится в смысле метрики $L_2(G\times G, p^{-1}(x)\,p^{-1}(y)\,dxdy)$. *В каждой строго внутренней ограниченной подобласти из* $G\times G$ *ряд* (5) *сходится абсолютно и равномерно.*

Утверждения следуют из общей теории разложения по собственным функциям карлемановского оператора [1—4]. Равенства (4) проверяются непосредственно при использовании представления (3). Гладкость спектрального ядра, как решения уравнений (4), следует из теоремы о гладкости решений внутри области.

3. Пусть $G_0 \subseteq G$ произвольная ограниченная область, примыкающая к Γ по куску Γ_0. Пусть (гр) таковы как в п. 1, тогда по теореме 6 [8] имеет место теорема о локальном повышении гладкости решений. Поэтому для резольвенты R_z самосопряженного расширения A оператора Λ (гр) в $L_2(G)$, согласно теореме 1 из [7] (см. также [4]), справедливо следующее утверждение: R_z^N $(Nr > \frac{n}{2})$ является интегральным оператором с гладким ядром $R(x, y)$ $(x, y \in G)$, для которого интегралы предложения 1 ограничены при x, y, меняющихся строго внутри G и ограниченных. Более того, как и в [7, 4], пользуясь теоремой 6 [8], можно показать, что эти интегралы остаются ограниченными и при $x, y \in \overline{G}_0'$, где G_0' — подобласть G_0, имеющая с G_0 общую границу по куску Γ_0', лежащему строго внутри Γ_0. Итак, имеет место предложение 1, и ограниченность второго из интегралов в предложении 1 при $y \in \overline{G}_0'$ позволяет выбрать требуемую (см. п. 2) $1 \leqslant p(y) \in G\alpha(G \cup \Gamma_0)$. Поэтому функции из $L_2(G, p^{-1}dx)$ интегрируемы с квадратом вплоть до Γ_0'.

Так как спектральное ядро и мера, по существу, не изменяются при изменении вида функции $\gamma(\lambda)$ (см. [4]), то возможно применение к A теоремы 2 в области $G \cup \Gamma$, и при $\gamma(A) = R_z^N$. В качестве Д выбирается совокупность всех u из $H_r(G)$, аннулирующихся в окрестностях $\Gamma \setminus \Gamma_0$ и ∞, а на Γ_0 удовлетворяющих однородным псевдодифференциальным граничным условиям.

Теорема 3. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 2. *Тогда спектральное ядро* $\Phi(x, y, \lambda)$ *входит в* $L_2(G \times G)$ *вплоть до* $((G_0 \cup \Gamma_0) \times \Gamma_0) \cup (\Gamma_0 \times (G_0 \cup \Gamma_0))$ (G_0, Γ_0 — *такие как указано выше*). *При фиксированном* $y \in G$ $(x \in G)$ *оно входит в* $H_{2m+q}(G_0)\left(q \geqslant \dfrac{n}{2}\right)$ *вплоть до* Γ_0 *и на* Γ_0 *удовлетворяет однородным псевдодифференциальным граничным условиям*

$$B_{j,x}\Phi(x, y, \lambda)\big|_{x \in \Gamma_0} = 0 \quad (\overline{B}_{j,y}\Phi(x, y, \lambda)\big|_{y \in \Gamma_0} = 0), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Таким же свойством обладает каждая обобщенная собственная функция $\varphi(x, \lambda) \in \mathfrak{R}(P(\lambda))$. *Разложение* (5) *сходится абсолютно и равномерно в каждой ограниченной подобласти* $G \times G$.

Гладкость $\Phi(x, y, \lambda)$ и удовлетворение однородным псевдодифференциальным граничным условиям следует из утверждения о повышении гладкости решений и из того, что (4) удовлетворяются вплоть до границы Γ_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, О разложении по собственным функциям общих самосопряженных дифференциальных операторов, ДАН СССР, т. 108, № 3, 1956.
2. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Матем. сб., т. 43, № 1, 1957.
3. Ю. М. Березанский, О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, УМЖ, т. XI, № 1, 1959.
4. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
5. С. О. Рущицкая, Теорема о гомеоморфизмах для эллиптического дифференциального выражения и псевдодифференциальных граничных условий, УМЖ, т. 21, № 2, 1969.
6. Ю. М. Березанский, О гладкости вплоть до границы области спектральной функции самосопряженного дифференциального эллиптического оператора, ДАН СССР, т. 152, № 3, 1963.
7. Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг, О гладкости вплоть до границы области ядра резольвенты эллиптического оператора, УМЖ, т. XV, № 2, 1963.

8. С. О. Рущицька, Теорема про гомеоморфізми та гладкість розв'язків еліптичної задачі, породженої диференціальним виразом та псевдодиференціальними граничними умовами, ДАН УРСР, сер. А, № 5, 1969.
9. W. G. Bade and R. S. Freeman, Closed extensions of the Laplace operator determined by a general class of boundary conditions, Pacif. J. Math., 12, N 2, 1962.
10. R. Beals, Non-local boundary value problems for elliptic operators, Amer. J. Math., v. 87, N 2, 1965.
11. М. С. Агранович, Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН, т. 20, № 5, 1965.
12. L. Gårding, Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators, 12 Scand. Mat. Kongr., Lund, 1953.
13. F. E. Browder, The eigenfunctionexpansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 40, N 6, 1954

Поступила 9.IX 1968 г.
Институт математики АН УССР