УДК 517.537

О равномерном приближении в замкнутой области с помощью обобщенных полиномов Фабера

А. В. Стовбун

Пусть B — ограниченная жорданова односвязная область с кусочно гладкой границей L;

$$z = \Psi(w) = w + \beta_0 + \frac{\beta_1}{w} + \dots$$

— функция, однолистно и конформно отображающая область $|w| > \varrho$ на дополнение B' для B до расширенной плоскости так, что $\Psi(\infty) = \infty$, $\Psi'(\infty) = 1$; $w = \Phi(z)$ — функция, обратная для $z = \Psi(w)$.

Введем функцию $s(z)$, регулярную в дополнении B', непрерывную в $\overline{B}'$ и не обращающуюся в нуль в $\overline{B}'$. Введем обобщенные полиномы Фабера $\Pi_k(z)$, $k = 0, 1, \dots$, соответствующие функции $R(t) = s(\Psi(t))$ см. [1] стр. 153). Произвольной функции $f(z)$, регулярной в B и непрерывной в. $\overline{B}$, сопоставим ряд по полиномам $\Pi_k(z)$:

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Pi_k(z), \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\varrho} \frac{f(\zeta)}{s(\zeta)} \frac{\Phi'(\zeta)}{\Phi(\zeta)^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\Psi(\varrho e^{it}))\, dt}{s(\Psi(\varrho e^{it}))\, \varrho^k e^{ikt}}. \tag{2}$$

Для $\Pi_k(z)$ имеем формулы

$$\Pi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{s(\zeta)\, \Phi(\zeta)^k}{\zeta - z} d\zeta, \; z \in B_r, \; \varrho \leqslant r < \infty, \; k = 0, 1, \dots \tag{3}$$

Если $z \in L_r$, то в силу формулы Привалова [2]

$$\Pi_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_r} \frac{s(\zeta)\, \Phi(\zeta)^k}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2} s(z)\, \Phi(z)^k, \; z \in L_r, \; k = 0, 1, \dots \tag{4}$$

Несобственный интеграл, входящий в эту формулу, понимается в смысле главного значения. Отметим, что при $k=-1, -2, \ldots$ правые части (3) и (4) равны нулю.

В работе [3] была получена интегральная формула для различных методов суммирования рядов по многочленам Фабера, а в работе [4] дана оценка сверху наилучшего равномерного приближения $E_n(f)$ функции $f(z)$, регулярной в B и непрерывной на $\overline{B}$ с помощью многочленов Фабера.

Действуя методом В. К. Дзядыка, мы получим интегральную формулу для специально построенных многочленов по обобщенным полиномам Фабера и затем оценку для $E_n(f)$.

Пусть λ_k, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — заданные числа. Получим формулы для полинома

$$T_n(z)=\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \Pi_k(z).$$

Пользуясь (2) и (4) при $z \in L_r$, $r=\varrho$, имеем

$$T_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\psi(re^{it}))\,dt}{s(\psi(re^{it}))\,r^k e^{ikt}}\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r}\frac{s(\zeta)\,\Phi(\zeta)^k}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2}s(z)\,\Phi^k(z)\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\psi(re^{it}))}{s(\psi(re^{it}))}\left[\int_{L_r}\frac{s(\zeta)}{\zeta-z}\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k\frac{\Phi^k(\zeta)}{r^k e^{ikt}}\,d\zeta\right]dt+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\psi(re^{it}))\,s(z)}{s(\psi(re^{it}))}\left[\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k\frac{\Phi^k(\zeta)}{r^k e^{ikt}}\right]dt.$$

Положим $t=\tau+\arg\Phi(\zeta)$ и затем снова заменим τ на t, тогда

$$T_n(z)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{f(\psi(\Phi(\zeta)\,e^{it}))}{s(\psi(\Phi(\zeta)\,e^{it}))}\int_{L_r}\frac{s(\zeta)}{\zeta-z}\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e^{-ikt}\,d\zeta\right]dt+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\psi(\Phi(\zeta)\,e^{it}))\,s(z)}{s(\psi(\Phi(\zeta)\,e^{it}))}\left[\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e^{-ikt}\right]dt.$$

Вводя функцию $K_n(t)=\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k e^{-ikt}$, имеем

$$T_n(z)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\left[\int_{L_r}\frac{f(\psi(\Phi(\zeta)\,e^{it}))\,s(\zeta)\,d\zeta}{s(\psi(\Phi(\zeta)\,e^{it}))\,(\zeta-z)}\right]dt+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\frac{f(\psi(\Phi(\zeta)\,e^{it}))\,s(z)}{s(\psi(\Phi(\zeta)\,e^{it}))}\,dt,\quad z\in L_r. \tag{5}$$

Далее будем считать, что λ_k — вещественные числа и $\lambda_k=\lambda_{-k}$, а потому функция $K_n(t)$ — четная. Разбиваем интегралы (5) по промежуткам $[-\pi, 0]$

и $[0, \pi]$ и в первом заменяем t на $-t$, кроме того, для краткости записи полагаем $\zeta_t = \Psi(\Phi(\zeta) e^{it}\zeta$ и получаем

$$T_n(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^\pi K_n(t)\left\{\int_L \left[\frac{f(\zeta_t)}{s(\zeta_t)} + \frac{f(\zeta_{-t})}{s(\zeta_{-t})}\right]\frac{s(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right\}dt +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi K_n(t)\left[\frac{f(\zeta_t)}{s(\zeta_t)} + \frac{f(\zeta_{-t})}{s(\zeta_{-t})}\right]s(z)\,dt,\ z\in L. \qquad (6)$$

В силу формулы Привалова имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2}f(z). \qquad (7)$$

Так как $\lambda_0 = 1$ и $K_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\cos kt$, то, интегрируя (7), получим

$$f(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^\pi\left[\int_L \frac{2f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\right]dt + \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi K(t)\,f(z)\,dt. \qquad (8)$$

Рассмотрим разность

$$f(z) - T_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K_n(t)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[2\frac{f(\zeta)}{s(\zeta)} - \frac{f(\zeta_t)}{s(\zeta_t)} - \frac{f(\zeta_{-t})}{s(\zeta_{-t})}\right]\frac{s(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[2\frac{f(z)}{s(z)} - \frac{f(z_t)}{s(z_t)} - \frac{f(z_{-t})}{s(z_{-t})}\right]s(z)\right\}dt,\ z\in L. \qquad (9)$$

Эта формула при $s(z)\equiv 1$ превращается в формулу В. К. Дзядыка [3], формула (9) будет исходной для оценки сверху наилучшего равномерного приближения $E_n(f)$ функции $f(z)$ с помощью полиномов степени не выше n. Преобразуем внутренний интеграл в (9)

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_L\left[2\frac{f(\zeta)}{s(\zeta)} - \frac{f(\zeta_t)}{s(\zeta_t)} - \frac{f(\zeta_{-t})}{s(\zeta_{-t})}\right]\frac{s(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad (10)$$

для чего введем новую переменную τ по формуле

$$\zeta = \psi\left[\Phi(z)\,e^{i\tau}\right] = \zeta(\tau). \qquad (11)$$

Тогда $\zeta_t = \psi\left[\Phi(z)\,e^{i(\tau+t)}\right] = \zeta(\tau+t)$, $\zeta_{-t} = \zeta(\tau - t)$, $z = \zeta(0)$, $z_t = \zeta(t)$, $z_{-t} = \zeta(-t)$ и

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{2f(\zeta(\tau))}{s(\zeta(\tau))} - \frac{f(\zeta(\tau+t))}{s(\zeta(\tau+t))} - \frac{f(\zeta(\tau-t))}{s(\zeta(\tau-t))}\right]\frac{\zeta'(\tau)\,s(\zeta(\tau))}{\zeta(\tau) - \zeta(0)}\,d\tau. \quad (12)$$

Обозначим интеграл по промежутку $[\alpha, \beta]$ от подынтегральной функции через I_α^β и разобьем I на 3 интеграла:

$$I = I_{-\pi}^{-\alpha} + I_{-\alpha}^{\alpha} + I_{\alpha}^{\pi},\quad 0 < \alpha < \pi.$$

Преобразуем интеграл

$$I_{-\alpha}^{\alpha}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\Bigg\{\frac{[f(\zeta(\tau+t))-f(\zeta(t))]\,[s(\zeta(\tau+t))-s(\zeta(t))]}{s(\zeta(\tau+t))\,s(\zeta(t))}+$$

$$+\frac{[f(\zeta(\tau-t))-f(\zeta(-t))]\,[s(\zeta(\tau-t))-s(\zeta(-t))]}{s(\zeta(\tau-t))\,s(\zeta(-t))}\,s(\zeta(0))+$$

$$+\left[\frac{f(\zeta(t))\,[s(\zeta(\tau+t))-s(\zeta(t))]}{s(\zeta(\tau+t))\,s(\zeta(t))}+\frac{f(\zeta(-t))\,[s(\zeta(\tau-t))-s(\zeta(-t))]}{s(\zeta(\tau-t))\,s(\zeta(-t))}\right]\times$$

$$\times[s(\zeta(\tau))-s(\zeta(0))]-\left[\frac{f(\zeta(\tau+t))-f(\zeta(t))}{s(\zeta(\tau+t))}+\frac{f(\zeta(\tau-t))-f(\zeta(-t))}{s(\zeta(\tau-t))}\right]\times$$

$$\times[s(\zeta(\tau))-s(\zeta(0))]\Bigg\}\frac{\zeta'(\tau)\,d\tau}{\zeta(\tau)-\zeta(0)}+\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(\zeta(\tau))-f(\zeta(0))}{\zeta(\tau)-\zeta(0)}\,\zeta'(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\,\frac{s(\zeta(0))}{s(\zeta(t))}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(\zeta(\tau+t))-f(\zeta(t))}{\zeta(\tau)-\zeta(0)}\,\zeta'(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\,\frac{s(\zeta(0))}{s(\zeta(t))}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(\zeta(\tau-t))-f(\zeta(-t))}{\zeta(\tau)-\zeta(0)}\,\zeta'(\tau)\,d\tau-\left(\frac{f(\zeta(t))}{s(\zeta(t))}+\frac{f(\zeta(-t))}{s(\zeta(-t))}\right)\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{[s(\zeta(\tau))-s(\zeta(0))]\,\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau)-\zeta(0)}\,d\tau-s(\zeta(0))\,f(\zeta(t))\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\dfrac{1}{s(\zeta(\tau+t))}-\dfrac{1}{s(\zeta(t))}}{\zeta(\tau)-\zeta(0)}\,\zeta'(\tau)\,d\tau-s(\zeta(0))\,f(\zeta(-t))\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\dfrac{1}{s(\zeta(\tau-t))}-\dfrac{1}{s(\zeta(-t))}}{\zeta(\tau)-\zeta(0)}\,\zeta'(\tau)\,d\tau+\left[2\frac{f(\zeta(0))}{s(\zeta(0))}-\frac{f(\zeta(t))}{s(\zeta(t))}-\right.$$

$$\left.-\frac{f(\zeta(-t))}{s(\zeta(-t))}\right]\frac{s(z)}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\zeta'(\tau)\,d\tau}{\zeta(\tau)-\zeta(0)}.\qquad(13)$$

Первое слагаемое — I_1, очевидно, оценивается так:

$$|I_1^*|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\Bigg\{\frac{2\omega(f,M\tau)\,\omega(s,M\tau)}{m_s^2}M_s+\frac{2M_f}{m^2}\,\omega(s,M\tau)^2+$$

$$+\frac{2}{m_s}\omega(f,M\tau)\,\omega(s,M\tau)\Bigg\}\frac{M_{\zeta'}}{m\tau}\,d\tau=\frac{2M_{\zeta'}}{\pi m}\left(\frac{M_s}{m_s^2}+\frac{1}{m_s}\right)\int_0^{\alpha}\frac{\omega(f,M\tau)\,\omega(s,M\tau)}{\tau}\,d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi}\,\frac{M_fM_{\zeta'}}{m_s^2m}\int_0^{\alpha}\frac{\omega(s,M\tau)^2}{\tau}\,d\tau,\qquad(14)$$

где $\omega(f, M\tau)$ и $\omega(s, M\tau)$ — модули непрерывности соответственно функций $f(z)$ на области $\overline{B}$ и $s(z)$ — $\overline{B}'$,

$$M_s = \max_{z\in L} |s(z)|, \quad m_s = \min_{z\in L} |s(z)|, \quad M_f = \max_{z\in L} |f(z)|, \quad M_{\zeta'} = \max_{-\pi\leqslant\tau\leqslant\pi} |\zeta'(\tau)|,$$

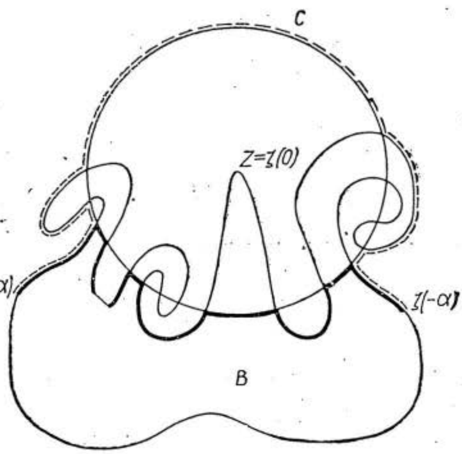
$$m = \inf_{\substack{-\pi\leqslant\tau\leqslant\pi \\ -\pi\leqslant t\leqslant\pi}} \frac{|\zeta(\tau+t)-\zeta(t)|}{|\tau|}, \quad M = \sup_{\substack{-\pi\leqslant\tau\leqslant\pi \\ -\pi\leqslant t\leqslant\pi}} \frac{|\zeta(\tau+t)-\zeta(t)|}{|\tau|}.$$

Далее

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(\zeta(\tau)) - f(\zeta(0))}{\zeta(\tau)-\zeta(0)}\,\zeta'(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{[f(\zeta)-f(z)]}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

В силу формулы Привалова

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma} - \int_{\hat{\gamma}}\right)\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta = 0.$$



В качестве $\hat{\gamma}$ возьмем следующую кривую. Проведем окружность C радиуса $m\alpha$ с центром в точке z и в качестве $\hat{\gamma}$ возьмем кривую, составленную из дуг этой окружности и кривой γ, как это указано жирной линией на рисунке. $|\hat{\gamma}|$ означает длину кривой $\hat{\gamma}$. Тогда

$$|I_2^*| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\hat{\gamma}} \left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\right| |d\zeta| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{\omega(f, M\alpha)}{m\alpha}\,|\gamma| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{M_{\zeta'}}{\pi m} + \frac{\pi-1}{\pi}\right)\omega(f, M\alpha). \tag{15}$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(\zeta(\tau+t)) - f(\zeta(t))}{\zeta(\tau)-\zeta(0)}\,\zeta'(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(\zeta(\tau+t))-f(\zeta(t))}{\zeta(\tau+t)-\zeta(t)}\times$$

$$\times\,\zeta'(\tau+t)\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}[f(\zeta(\tau+t)) - f(\zeta(t))]\left[\frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau)-\zeta(0)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\zeta'(\tau+t)}{\zeta(\tau+t)-\zeta(t)}\right]d\tau. \tag{16}$$

Первый интеграл справа, очевидно, можно оценить так

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\frac{f(\zeta)-f(z_t)}{\zeta - z_t}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\gamma}_+}\frac{f(\zeta)-f(z_t)}{\zeta-z_t}\,d\zeta,$$

где γ_+ и γ_- — дуги кривой L, имеющие соответственно начало в точках $\zeta(-\alpha+t)$ и $\zeta(-\alpha-t)$ и конец в точках $\zeta(\alpha+t)$ и $\zeta(\alpha-t)$, а кривые $\hat{\gamma}_+$ и $\hat{\gamma}_-$ — простые спрямляемые кривые, лежащие в $\overline{B}$, имеющие те же начала и концы, что и кривые γ_+ и γ_- и не проходящие соответственно через точки z_t и z_{-t}. Ясно, что он оценивается той же величиной, что и интеграл I_2^*.

Чтобы оценить второй интеграл справа в (16), оценим предварительно выражение A, стоящее в квадратных скобках

$$|A| \leqslant \frac{1}{m^2\tau^2}\left|\int\limits_t^{t+\tau} \zeta'(\tau)\zeta'(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^\tau \zeta'(\tau+t)\zeta'(\xi)\,d\xi\right| = \frac{1}{m^2\tau^2}\times$$

$$\times\left|\int\limits_0^\tau [\zeta'(\tau)\zeta'(\xi+t) - \zeta'(\tau+t)\zeta'(\xi)]\,d\xi\right| = \frac{1}{m^2\tau^2}\left|\int\limits_0^\tau \{(\zeta'(\tau)-\zeta'(\xi))\zeta'(\xi-t) +\right.$$

$$\left. + \zeta'(\xi)[\zeta'(\xi+t)-\zeta'(\tau+t)]\}\,d\xi\right| \leqslant \frac{2}{m^2\tau^2}\int\limits_0^\tau M_{\zeta'}\,\omega(\zeta', |\tau -$$

$$-\xi|)\,d\xi \leqslant \frac{2M_{\zeta'}}{m^2\tau}\,\omega(\zeta', |\tau|),$$

где $\omega(\zeta', \delta) = \sup|\psi'(e^{i(\tau'+t_0)}) - \psi'(e^{i(\tau+t_0)})|$ при любом $z\in L$ и $\Phi(z) = e^{it_0}$. Поэтому второй интеграл в (16) не превосходит величины

$$\frac{2M_{\zeta'}}{\pi m^2}\int\limits_0^\alpha \frac{\omega(f, M\tau)\,\omega(\zeta', \tau)}{\tau}\,d\tau$$

и, следовательно,

$$|I_3^*| \leqslant \left[2\left(\frac{M_{\zeta'}}{\pi m} + \frac{\pi-1}{\pi}\right)\omega(f, M\alpha) + \frac{2M_{\zeta'}}{\pi m^2}\int\limits_0^\alpha \frac{\omega(f, M\tau)\,\omega(\zeta', \tau)\,d\tau}{\tau}\right]\frac{M_s}{m_s}. \quad (17)$$

Этой же величиной оценивается и I_4^* в (13). Пятое слагаемое I_5^* в (13) оценивается так же, как и I_2^*, а шестое слагаемое I_6^* в (13) оценивается так же, как и I_3^*, но вместо $\hat{\gamma}$ нужно взять $\check{\gamma}$, где $\check{\gamma}$ — кривая, составленная из дуг окружности C и дуг кривой γ, как указано пунктиром на рисунке. При этом получаем

$$|I_5^*| \leqslant 2\frac{M_f}{m_s}\left(\frac{M_{\zeta'}}{\pi m} + \frac{\pi-1}{\pi}\right)\omega(s, M\alpha), \quad (18)$$

$$|I_6^*| \leqslant \frac{M_s M_f}{m_s^2}\left(\frac{M_{\zeta'}}{\pi m} + \frac{\pi-1}{\pi}\right)\omega(s, M\alpha) + \frac{2M_s M_f M_{\zeta'}}{\pi m_s^2 m^2}\int\limits_0^\alpha \frac{\omega(s, M\tau)\,\omega(\zeta', \tau)}{\tau}\,d\tau. \quad (19)$$

Той же величиной, что и I_6^*, оценивается I_7^* в (13). Интеграл в восьмом слагаемом I_8^* можно записать так: $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ и в силу теоремы Привалова $\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_\gamma - \int\limits_{\check{\gamma}}\right)\frac{d\zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{2}$ и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i}\left(\ln\left|\frac{\zeta(\alpha) - z}{\zeta(-\alpha) - z}\right| + i\varphi(\alpha)\right),$$

где $\varphi(\alpha)$ — приращение $\arg(\zeta - z)$ при движении точки по кривой $\check{\gamma}$. Таким образом

$$I_8^* = -I(t) + \left[2\frac{f(z)}{s(z)} - \frac{f(z_t)}{s(z_t)} - \frac{f(z_{-t})}{s(z_{-t})}\right]\frac{1}{2\pi i}\left(\ln\left|\frac{\zeta(\alpha) - z}{\zeta(-\alpha) - z}\right| + i\varphi(\alpha)\right). \quad (20)$$

Второе слагаемое в (20) не превосходит величины

$$2\omega\left(\frac{f}{s},\quad Mt\right)\left(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{M}{m} + 1\right). \quad (21)$$

Учитывая формулы (9), (10), (12) — (21) и заменяя t на α, кроме того, используя свойства модуля непрерывности $\left(\text{ибо мы рассматриваем } 0 \leqslant t \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, получим оценку

$$|I(t)| \leqslant \left\{A_1 + [A_2\omega(s, \alpha) + A_3\omega(\zeta', \alpha)]\ln\frac{2\pi}{3\alpha}\right\}[\omega(f, \alpha) + A_4M_f\omega(s, \alpha)] +$$

$$+ A_5\int_0^\alpha \omega(f, \tau)\,\omega(s, \tau)\frac{d\tau}{\tau} + A_6\int_0^\alpha \omega(f, \tau)\,\omega(\zeta', \tau)\frac{d\tau}{\tau} + A_7M_f\int_0^\alpha \omega(s, \tau)^2 \times$$

$$\times \frac{d\tau}{\tau} + A_8M_f\int_0^\alpha \omega(s, \tau)\,\omega(\zeta', \tau)\frac{d\tau}{\tau}, \quad (22)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_8$ — некоторые постоянные.

Если в этой формуле положить $\alpha = \frac{\pi}{n+1}$ при $t \leqslant \frac{\pi}{n+1}$, $\alpha = t$ при $\frac{\pi}{n+1} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \pi$ при $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$, то предыдущие рассуждения упрощаются, и мы получим оценку, аналогичную (22), в которой выражение $A_2\omega(s, \alpha) + A_3\omega(\zeta', \alpha) = 0$.

Для оценки $|f(z) - T_n(z)|$ пользуемся формулами (8), (9)

$$|f(z) - T_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi K_n(t)\,|I(t)|\,dt. \quad (23)$$

В качестве ядра $K_n(t)$ возьмем ядро Джексона

$$K_{2n}(t) = \frac{3}{n(2n^2 + 1)}\frac{\sin^4\frac{nt}{2}}{\sin^4\frac{t}{2}},$$

для которого имеют место оценки

$$K_{2n}(t) \leqslant \begin{cases} \frac{3}{2}n & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{n+1}, \\ \frac{3}{2}\,\frac{\pi^4}{n^3t^4} & \text{при } \frac{\pi}{n+1} \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

Сначала оценим интеграл от $K_n(t) I(t)$ по промежутку $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{n+1}$, затем по промежутку $\frac{\pi}{n+1} \leqslant t \leqslant \pi$, причем нужно учитывать, что

$$\omega(\varphi, t) = \omega\left(\varphi, \frac{n+1}{\pi} t \frac{\pi}{n+1}\right) \leqslant \left(\frac{n+1}{\pi} t + 1\right) \omega\left(\varphi, \frac{\pi}{n+1}\right).$$

Например,

$$\int_0^t \omega(f, \tau)\, \omega(\zeta', \tau) \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega(f, \tau)\, \omega(\zeta', \tau) \frac{d\tau}{\tau} + \int_{\frac{\pi}{n+1}}^t \omega(f, \tau)\, \omega(\zeta', \tau)\, d\tau,$$

а

$$\int_{\frac{\pi}{n+1}}^t \omega(f, \tau)\, \omega(\zeta', \tau) \frac{d\tau}{\tau} \leqslant \int_{\frac{\pi}{n+1}}^t \left(\frac{n+1}{\pi} \tau + 1\right)^2 \frac{d\tau}{\tau}\, \omega\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right) \omega\left(\zeta', \frac{\pi}{n+1}\right) =$$

$$= \left[\left(\frac{n+1}{\pi}\right)^2 \frac{t^2}{2} + 2\, \frac{n+1}{\pi} t + \ln \frac{n+1}{\pi} t - \frac{3}{2}\right] \omega\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right) \omega\left(\zeta', \frac{\pi}{n+1}\right).$$

Далее нужно интегрировать по промежутку $\left[\frac{\pi}{n+1}, \pi\right]$ выражения $\frac{(n+1)^2}{n^3 t^2}$, $\frac{n+1}{n^3 t^3}$, $\frac{1}{n^3 t^4}$ и эти же выражения, умноженные на $\ln \frac{\pi}{t}$ и на $\ln \frac{n+1}{\pi} t$. Легко подсчитать, что первые из этих интегралов ограничены постоянной, независимой от n, вторые — ограничены постоянной независимой от n, умноженной на $\ln(n+1)$, третьи — тоже ограничены.

Таким образом приходим к оценке

$$|f(z) - T_{2n}(z)| \leqslant \left\{A_1 + \left[A_2 \omega\left(s, \frac{\pi}{n+1}\right) + A_3 \omega\left(\zeta', \frac{\pi}{n+1}\right)\right] \ln(n+1)\right\} \times$$

$$\times \left[\omega\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right) + A_4 M_f \omega\left(s, \frac{\pi}{n+1}\right)\right] + A_5 \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega(f, \tau)\, \omega(s, \tau) \frac{d\tau}{\tau} +$$

$$+ A_6 \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega(f, \tau)\, \omega(\zeta', \tau) \frac{d\tau}{\tau} + A_7 M_f \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega(s, \tau)^2 \frac{d\tau}{\tau} +$$

$$+ A_8 M_f \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \omega(s, \tau)\, \omega(\zeta', \tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_6$ — постоянные.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, Конструктивная теория функций комплексного переменного, «Наука», М. — Л., 1964.
2. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, ГИТТЛ, М. — Л., 1952.
3. В. К. Дзядык, К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского. I, Изв. АН СССР, 26, 1962.
4. В. К. Дзядык, К теории приближения аналитических функций, непрерывных в замкнутых областях, и о проблеме С. М. Никольского. II, Изв. АН СССР, 27, 1963.

Поступила 11.IV 1967 г.
Ленинградская военная инженерная
Краснознаменная академия им. А. Ф. Можайского