УДК 519.21

Абсолютная непрерывность мер, соответствующих рядам из независимых устойчивых случайных величин, при линейных преобразованиях пространства

Р. Я. Майданюк

Пусть μ — мера на σ-алгебре подмножеств $\mathfrak{B}$ некоторого сепарабельного гильбертового пространства H, порождаемая элементом $\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k e_k$, где λ_k — нормирующая последовательность чисел, $\{e_k\}$ — ортонормированный базис пространства H, ξ_1, $\xi_2 \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных устойчивых случайных величин с характеристическим показателем δ и с нулевыми математическими ожиданиями. Пусть A — линейное измеримое отображение H на H, которое удовлетворяет следующим общим условиям:

1) оператор A обратим, т. е. существует A^{-1};

2) операторы A, A^{-1} — ограничены и $\det A = \det A^{-1} = 1$;

3) для достаточно больших n обратимы операторы A_n:

$$A_n x = x + P_n(A(x) - x), \quad A_n^{-1} x = x + P_n(A^{-1}(x) - x),$$

где P_n — проектирующий оператор на линейную оболочку векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Обозначим через ν меру, полученную из μ при отображении A, т. е. $\nu(B) = \mu(A^{-1}(B))$ для всех множеств $B \in \mathfrak{B}$.

Нас будут интересовать условия, при которых мера ν будет абсолютно непрерывна относительно μ.

Предположим, что оператор A имеет вид

$$A = I + \lambda B,$$

где I — единичный оператор, λ — линейный оператор, который в базисе $\{e_k\}$ имеет матрицу преобразования

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \cdot \end{pmatrix},$$

B—линейный ограниченный оператор с матрицей преобразования $\{a_{ik}\}$ в базисе $\{e_k\}$. Предположим, что A^{-1} имеет вид

$$A^{-1} = I + \lambda B_1,$$

где B_1 — линейный ограниченный оператор с матрицей преобразования $\{b_{ik}\}$ в базисе $\{e_k\}$.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если для некоторого* β, *удовлетворяющего условию* $1 < \beta < \delta$, *сходятся ряды* $\sum\limits_{i,k}^{\infty} |\lambda_i a_{ik}|^{\beta}$, $\sum\limits_{i,k}^{\infty} |\lambda_i b_{ik}|^{\beta}$ *и сходятся также ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_{kk}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k b_{kk}$, *то меры* ν *и* μ *эквивалентны и*

$$\frac{d\mu}{d\nu} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p\left\{\xi_k - \dfrac{(\lambda B\eta, e_k)}{\lambda_k}\right\}}{p\{\xi_k\}}, \quad \frac{d\nu}{d\mu}(\eta(\cdot)) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p\left\{\xi_k - \dfrac{(\lambda B_1\eta, e_k)}{\lambda_k}\right\}}{p\{\xi_k\}}.$$

Доказательство. В работе [1] доказано, что элемент $a \in H$ будет принадлежать множеству допустимых сдвигов M меры μ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(a, e_k)^2}{\lambda_k^2} < \infty$. Если D^2 — вполне непрерывный неотрицательный симметрический оператор с собственными векторами $\{e_k\}$ и соответственно собственными значениями $\{\lambda_k^2\}$, то множество допустимых сдвигов $M = DH$ и

$$\frac{d\mu_a}{d\mu}(\eta(\cdot)) = \varrho(a, \eta(\cdot)) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p\left\{\dfrac{(\eta, e_k)}{\lambda_k} - \dfrac{(a, e_k)}{\lambda_k}\right\}}{p\left\{\dfrac{(\eta, e_k)}{\lambda_k}\right\}}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что выражения

$$\varrho\,(P_n\,(\eta - A\eta),\ \eta), \tag{1}$$

$$\varrho\,(P_n\,(\eta - A^{-1}\eta),\ \eta) \tag{2}$$

имеют пределы по вероятности при $n \to \infty$ и

$$\varrho\,(\eta - A\eta,\ \eta)\,\varrho\,(A\eta - \eta,\ A\eta) = 1. \tag{3}$$

Для сходимости по вероятности (1) достаточно показать сходимость по вероятности ряда

$$\sum_{i,k}^{\infty} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\,\lambda_i a_{ik}\xi_i. \tag{4}$$

Перепишем (4) в виде

$$\sum_{i,k}^{\infty} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\,\lambda_i a_{ik}\xi_i = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\,\lambda_i a_{ik}\xi_i + \sum_{i<k} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\,\lambda_i a_{ik}\xi_i + \sum_{i>k} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\,\lambda_i a_{ik}\xi_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\,\lambda_k a_{kk}\xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_{ik}\xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \xi_i \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}\,\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}. \tag{5}$$

В силу условий теоремы первый ряд в выражении (5) будет сходиться с вероятностью единица, так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\xi_k \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\,\lambda_k a_{kk} = \mathbf{M}\left(\xi_k \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_{kk},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{D}\xi_k \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\,\lambda_k a_{kk} = \mathbf{D}\left(\xi_k \frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 a_{kk}^2 < \infty.$$

Для доказательства сходимости остальных двух рядов нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — последовательность случайных величин такая, что*

$$\mathbf{M}\,\{\eta_k/\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{k-1}\} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Тогда для любого $1 < j < 2$ имеет место оценка:

$$\mathbf{M}\left|\sum_{k=1}^{n} \eta_k\right|^{\gamma} \leqslant L_\gamma \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\,|\,\eta_k\,|^{\gamma}, \tag{6}$$

где $L_\gamma = \sup\limits_{t\in(-\infty,\infty)} \dfrac{|\,1+t\,|^{\gamma} - 1 - \gamma t}{|\,t\,|^{\gamma}}$.

Доказательство леммы получим сразу же, если воспользуемся неравенством

$$\frac{|\,a+b\,|^{\gamma} - |\,a\,|^{\gamma} - \gamma b\,|\,a\,|^{\gamma-1}\operatorname{sign} a}{|\,b\,|^{\gamma}} \leqslant L_\gamma,$$

которое справедливо для любых $a,\ b \in (-\infty, \infty),\ 1 < \gamma < 2$.

Покажем, что остальные два ряда в выражении (5) сходятся по вероятности. Для этого покажем, что

$$\mathbf{M}\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right|^{\beta}\to 0,$$

$$\mathbf{M}\left|\sum_{i=n}^{m}\lambda_i\xi_i\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right|^{\beta}\to 0$$

при $n,\ m\to\infty,\ 1<\beta<\delta$.

Поскольку последовательности случайных величин

$$\left\{\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right\},\qquad\left\{\lambda_i\xi_i\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right\}$$

удовлетворяют условию леммы, то, воспользовавшись оценкой (6), получим

$$\mathbf{M}\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right|^{\beta}\leqslant \mathbf{L}_\beta\sum_{k=n}^{m}\mathbf{M}\left|\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right|^{\beta}\mathbf{M}\left|\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right|^{\beta},$$

а так как и

$$\mathbf{M}\left|\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right|^{\beta}\leqslant \mathbf{L}_\beta\left|\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{M}\,|\,\xi\,|^{\beta}|\,\lambda\cdot a_{ik}\,|^{\beta},\right.$$

то окончательно получим

$$\mathbf{M}\left|\sum_{k=n}^{m}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i a_{ik}\xi_i\right|^{\beta}\leqslant \mathbf{L}_\beta^2\mathbf{M}\left|\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right|^{\beta}\mathbf{M}\,|\,\xi_k\,|^{\beta}\sum_{k=n}^{m}\sum_{i=1}^{k-1}|\,\lambda_i a_{ik}\,|^{\beta}.$$

В силу условий теоремы правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $n,\ m\to\infty$.

Аналогично и

$$\mathbf{M}\left|\sum_{i=n}^{m}\lambda_i\xi_i\sum_{k=1}^{i-1}a_{ik}\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right|^{\beta}\leqslant \mathbf{L}_\beta^2\mathbf{M}\,|\,\xi_k\,|^{\beta}\,\mathbf{M}\left|\frac{p'(\xi_k)}{p(\xi_k)}\right|^{\beta}\sum_{k=n}^{m}\sum_{i=1}^{k-1}|\,\lambda_i a_{ik}\,|^{\beta}\to 0$$

при $n, m\to\infty$

Существование предела по вероятности выражения (1) доказано.

Аналогично можно убедиться в сходимости по вероятности выражения (2).

Условие (3) выполняется, так как

$$\varrho(\eta-A\eta,\eta)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{p\left\{\dfrac{(\eta,e_k)}{\lambda_k}-\dfrac{(\eta,e_k)-(A\eta,e_k)}{\lambda_k}\right\}}{p\left\{\dfrac{(\eta,e_k)}{\lambda_k}\right\}}=$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{p\left\{\dfrac{(A\eta,e_k)}{\lambda_k}\right\}}{p\left\{\dfrac{(\eta,e_k)}{\lambda_k}\right\}},\qquad \varrho(A\eta-\eta,A\eta)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{p\left\{\dfrac{(\eta,e_k)}{\lambda_k}\right\}}{p\left\{\dfrac{(A\eta,e_k)}{\lambda_k}\right\}}.$$

Теорема доказана.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность А. В. Скороходу за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Я. Майданюк, Абсолютная непрерывность для простейших преобразований мер, которые соответствуют случайным рядам, сб. Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 1, Изд-во КГУ, К., 1969.

Поступила 4.VIII 1969 г.
Институт математики АН УССР