УДК 519.1

Определение числа однозначных отображений, содержащих заданную эквивалентность

А. Е. Юрцунь

При подсчете числа конечных графов, удовлетворяющих заданным условиям, определении мощности множества слов над некоторым алфавитом, нахождении числа различных двусторонних потоков данной величины и при решении других задач на подсчет часто приходится иметь дело с нахождением числа однозначных отображений.

В данной работе устанавливаются формулы, выражающие число однозначных отображений некоторого множества Z в (на) некоторое другое множество Y. Рассмотрен вопрос существования однозначных отображений σ множества Z на множество Y, степени $\delta\sigma = \nu$, таких что $\sigma^{-1}\sigma \supset e$, где e — некоторая эквивалентность на множестве Z, и приводится формула, выражающая число таких однозначных отображений.

Пусть Z и Y — некоторые конечные множества и $|Z| = l$, $|Y| = n$.

Как видно из работы [3], число различных однозначных отображений Z в Y есть мощность множества $S_l(Y)$ слов длины l над алфавитом Y. Таким образом, имеем

$$|S_l(Y)| = nl. \tag{1}$$

Число различных отображений Z на Y есть мощность множества $M_l(Y)$ слов длины l таких, что в состав каждого слова входят все элементы Y. Установлено [3], что

$$|M_l(Y)| = n! \sum_{\substack{d(\varrho)=n \\ \omega(\varrho)=l}} \tau(\varrho), \tag{2}$$

где $\varrho = \{\lambda_i^{\alpha_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ разбиение веса l и размерности n [1], а $\tau(\varrho) = l!/\prod\limits_{i=1}^{s}(\lambda_i!)^{\alpha_i}\alpha_i!$.

В работе [3] установлены формулы, выражающие числа различных однозначных отображений σ (множества Z в множество Y) степени ν, типа ϱ и таких, что $\sigma^{-1}\sigma = e$. Это мощности следующих множеств слов:

$$|M_\nu(Y)| = c(\delta\nu) = \frac{l!}{\prod\limits_{i=1}^{s}(\lambda_i!)^{\alpha_i}}, \tag{3}$$

$$|M_\varrho(Y)| = \frac{l!}{(l-d(\varrho))!}\tau(\varrho), \tag{4}$$

$$|M_e(Y)| = \frac{l!}{(l-d(r[e]))!}, \tag{5}$$

где $d(r[e])$ — размерность разбиения $\varrho' = r[e] = \{\lambda_j'^{\alpha_j'}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, связанного с данной эквивалентностью e (см. [1]).

Рассмотрим вопрос определения числа однозначных отображений σ множества Z на Y, степени $\delta\sigma = \nu$, таких, чтобы $\sigma^{-1}\sigma \supset e$, где e — некоторая эквивалентность на Z. Легко видеть, что число таких однозначных отображений зависит лишь от пары разбиений $\varrho = r[\sigma^{-1}\sigma]$ и $\varrho' = r[e]$, связанных с эквивалентностями $\sigma^{-1}\sigma$ и e на множестве Z.

Ясно, что $\omega(\varrho) = \omega(\varrho') = |Z| = l$.

Таким образом, число вышеупомянутых различных однозначных отображений есть значение функции $F(\varrho; \varrho')$ от пары разбиений одинакового веса, и существование таких однозначных отображений сводится к вопросу существования значения $F(\varrho; \varrho') > 0$.

Разбиения ϱ и ϱ' веса l представим двумя совокупностями натуральных чисел $A = \{a_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и $B = \{b_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_k$, $d(\varrho) = m$, $d(\varrho') = k$ и $\sum\limits_i a_i = \sum\limits_j b_j = l$.

Непосредственно видно, что при $m > k$ $F(\varrho; \varrho') = 0$, а при $\varrho = \varrho'$ $F(\varrho; \varrho') = \prod\limits_{i=1}^{s}(\alpha_i!)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для каждой пары разбиений* $(\varrho; \varrho')$ *веса* l *такой, что* $m < k$, значение функции $F(\varrho; \varrho') > 0$ *тогда и только тогда, когда существует двусторонний поток величины* l *в сети с узлами* $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ *и* $T = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ [2]. *При этом пропускная способность* $d \times (x_i, y_j)$ *дуги* (x_i, y_j) *равна или* b_j, *или нулю.*

Легко видеть, что задача о допустимости двустороннего потока величины l в сети с узлами V и T эквивалентная задаче о существовании (0, 1) — матрицы $C = \{c_{ij}\}$ размера $m \times k$, удовлетворяющей условиям

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} = 1, \qquad \sum_{j=1}^{k} c_{ij} b_j = a_i.$$

До настоящего времени не найдена явная формула, выражающая необходимое и достаточное условие существования значения функции $F(\varrho; \varrho') > 0$.

Рассмотрим некоторые отдельные случаи при $m < k$:

а) если $a_i = a_{i+1} = a$ и $b_j = b_{j+1} = b$, то $F(\varrho; \varrho') > 0$, когда a делится на b и $F(\varrho; \varrho') = 0$ в противоположном случае. Пусть $a/b = c$. Тогда $F(\varrho; \varrho') = k!/(c!)^m$;

б) если $a_i \neq a_{i+1}$, а $b_j = b_{j+1} = b$, то $F(\varrho; \varrho') > 0$, когда каждое a_i делится на b, и $F(\varrho; \varrho') = 0$ в противном случае. Пусть $a_i/b = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, тогда

$$F(\varrho; \varrho') = \frac{k!}{\prod\limits_{i=1}^{m}(c_i!)} = \frac{k!}{\prod\limits_{i=1}^{s}(c_i!)^{\alpha}}; \tag{6}$$

в) если $a_i = a_{i+1} = a$ и $b_j \neq b_{j+1}$, то установить существование значения функции $F(\varrho; \varrho') > 0$ можно следующим образом. Находим $a - b_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, получим $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_{p_1}$ и $b_1' \geqslant b_2' \geqslant \ldots \geqslant b_{q_1}'$, где

$b_1' = b_{m+1}$, $b_2' = b_{m+2}, \ldots, b_{q_1}' = b_k$. Если $p_1 \leqslant q_1$, то находим $a_i - b_i' = a_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, p_1)$ и $a_1' \geqslant a_2' \geqslant \ldots \geqslant a_{p_2}'$, $b_1'' \geqslant b_2'' \geqslant \ldots \geqslant b_{q_2}''$ и т. д.

Теорема 2. *В случае* в) $F(\varrho; \varrho') > 0$ *тогда и только тогда, когда* $p_i \leqslant q_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

При достаточно больших l определение существования значения функции $F(\varrho; \varrho') > 0$ в случае в) можно осуществить с помощью ЭВМ.

Пусть теперь для некоторой пары разбиений $(\varrho; \varrho')$ веса l $F(\varrho; \varrho') > 0$ и элементы множества Z окрашены по формуле разбиения $\varrho = \{\lambda_i^{\alpha_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, т. е. окрашены $d(\varrho) = m$ цветами так, что λ_i элементов окрашены одним из α_i различных цветов.

Определение. «l-выборкой типа ϱ'» назовем всякую эквивалентность e_l на множестве Z с множеством классов $\{v_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, где каждый класс v_j имеет мощность $|v_j| = \alpha_j'\lambda_j'$, состоит из элементов Z, окрашенных не больше чем α_j' цветами, и число элементов одного цвета кратно числу λ_j'.

Обозначим через $\varrho_j^* = \{\lambda_t''^{\alpha_t''}\}$ тип j-го класса эквивалентности e_l относительно окраски его элементов. Так как каждое λ_t'', согласно определению, кратно числу λ_j', то легко получить разбиение $\bar{\varrho}_j^* = \{(\lambda_t''/\lambda_j')^{\alpha_t''}\}$ для каждого класса эквивалентности.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.

$$F(\varrho; \varrho') = \sum_{e_l} \prod_{j=1}^{k} c(\bar{\varrho}_j^*), \tag{7}$$

где суммирование ведется по всем различным l-выборкам типа ϱ'.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.
2. А. Форд, Д. Фалкерсон, Потоки в сетях, «Мир», М., 1966.
3. А. Е. Юрцунь, О принципах подсчета числа графов, УМЖ, т. 18, № 5, 1966.

Поступила 14.III 1968 г.

Отделение комплексных проблем науковедения
Совета по изучению производственных сил УССР АН УССР