УДК 517.512.6

Об одном методе получения асимптотических формул для экстремальной последовательности регулярно моноточных полиномов

Г. А. Согомонова

Обозначим через $Ц_{n,r}^{(\lambda_s)}$ класс регулярно монотонных [1, стр. 350] порядка n на $[0,1]$ полиномов $y_{n,r}(x)$, $y_{n,r}^{n}(x) \equiv 1$ с типовыми числами, образующими периодическую последовательность вида

$$\lambda_{i+1} - j,\ \lambda_{i+2}, \ldots, \lambda_s,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s, \ldots, \tag{1}$$

где r, i, j и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ связаны соотношениями

$$r = q(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s) + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i + j,$$

$$q = 0, 1, \ldots,\ i = 0, 1, \ldots,\ s-1,\ j = 0, 1, \ldots,\ \lambda_{i+1} - 1,$$

$r, s, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — фиксированные целые неотрицательные числа.

Следуя С. Н. Бернштейну [1, стр. 351], будем говорить, что производная порядка ν $y_{n,r}^{(\nu)}(x)$, $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ является внутренним членом пермананса (альтернанса), если при $x \in [0, 1]$

$$y_{n,r}^{(\nu)}(x)\ \ y_{n,r}^{(\nu+1)}(x) \geqslant 0 \quad (y_{n,r}^{(\nu)}(x)\, y_{n,r}^{(\nu+1)}(x) \leqslant 0).$$

Последовательность полиномов $\{P_{n,r}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ назовем экстремальной последовательностью, если каждый полином $P_{n,r}(x)$ этой последовательности принадлежит классу $Ц_{n,r}^{(\lambda_s)}$ и является в нем экстремальным, т. е. наименее уклоняющимся от 0 на $[0, 1]$.

В работах [5, 6] изложены некоторые общие свойства полиномов экстремальной последовательности, установленные автором. Так, например, из теоремы 1 [5] следует, что экстремальные полиномы удовлетворяют условию:

$$P_{n,r}^{(\nu)}(\alpha_{\nu}^{(r)}) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

где $\alpha_{\nu}^{(r)}$ равно 0 или 1, смотря по тому, является ли производная $P_{n,r}^{(\nu)}(x)$ внутренним членом пермананса или альтернанса соответственно.

Далее, было доказано [2, стр. 1015], что экстремальная последовательность $\{P_{n,r}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является последовательностью обобщенных полиномов Аппеля класса $A^{(k)}$*, т. е. имеет место соотношение

$$P_{n,r}^{(k)}(x) \equiv P_{n-k,r}(x), \tag{3}$$

где $k = \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s, & \text{если } s \text{ — четно}, \\ 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s), & \text{если } s \text{ — нечетно}. \end{cases}$

Из (2) и (3) следует

$$P_{n,r}(x) = \int_{\alpha_0^{(r)}}^{x} dx_1 \int_{\alpha_1^{(r)}}^{x_1} dx_2 \ldots \int_{\alpha_{k-1}^{(r)}}^{x_{k-1}} P_{n-k,r}(x_k)\, dx_k. \tag{4}$$

---

* Здесь и в дальнейшем предполагается знакомство читателя с теорией регулярно монотонных функций, созданной С. Н. Бернштейном [1, 2]. Употребляются также обозначения и термины, принятые в работах [1—4, 7], а также в работах автора [5, 6].

Обозначим через $\hat{A}_i$, $i=0, 1$, интегральный оператор, определяемый равенством

$$\hat{A}_i f(x) = \int_0^1 K_i(x, y) f(y)\, dy,$$

где

$$K_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < y, \\ 1 & \text{при} \quad x \geqslant y, \end{cases}$$

$$K_1(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \geqslant y, \\ -1 & \text{при} \quad x < y, \end{cases}$$

$$f(x) \in C_{[0,1]}.$$

В этих обозначениях равенство (4) принимает вид

$$P_{n,r}(x) = \hat{B} P_{n-k,r}(x),$$

где

$$\hat{B} = \hat{A}_{\alpha_0^{(r)}} \hat{A}_{\alpha_1^{(r)}} \ldots \hat{A}_{\alpha_{k-1}^{(r)}}.$$

Так как ядра $K_0(x, y)$ и $K_1(x, y)$ кусочно-непрерывны, то $\hat{A}_i$, $i=0, 1$, — оператор Фредгольма; значит, оператор $\hat{B}$ также является оператором Фредгольма.

Следовательно, можем записать [3]

$$P_{n,r}(x) = \hat{B} P_{n-k,r}(x) = \int_0^1 K_{\hat{B}}(x, y) P_{n-k,r}(y)\, dy,$$

где $K_{\hat{B}}(x, y)$ — функция Грина линейного дифференциального оператора $\hat{L} = B^{-1}$, порожденного дифференциальным выражением $l(f) = f^{(k)}$ и распадающимися краевыми условиями

$$f^{(\nu)}(\alpha_\nu^{(r)}) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Заметим, что эти краевые условия не эквивалентны условиям Коши. Если оператор $\hat{B}$ самосопряженный [3], а следовательно и $\hat{L} = \hat{L}^*$ (что имеет место, например, если $s=2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, так как $\hat{A}^*_{\alpha_\nu^{(r)}} = -\hat{A}_{1-\alpha_\nu^{(r)}}$ и

$$B^* = (-1)^k \hat{A}_{1-\alpha_{k-1}^{(r)}} \hat{A}_{1-\alpha_{k-2}^{(r)}} \ldots \hat{A}_{1-\alpha_0^{(r)}}),$$

то полином $P_{k+l,r}(x)$, $l = 0, 1, \ldots$, принадлежащий, очевидно, области определения оператора $\hat{L}$, разлагается в равномерно сходящийся обобщенный ряд Фурье

$$P_{k+l,r}(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \varphi_p(x), \tag{5}$$

где φ_p — собственная функция оператора $\hat{B}$, отвечающая собственному значению K_p. Если же $\hat{B} \neq \hat{B}^*$ (а следовательно, и $\hat{L} \neq \hat{L}^*$), но все собственные значения $\mu_p = \frac{1}{K_p}$ оператора $\hat{L}$ суть простые нули характеристического определителя $\Delta(\mu)$, то разложение (5) также имеет место в силу теоремы М. В. Келдыша [3].

Из (5) и равенств

$$\widehat{B}P_{k+l,r}(x)=P_{2k+l,r}(x),$$

$$\widehat{B}P_{2k+l,r}(x)=\widehat{B}^2P_{k+l,r}(x)=P_{3k+l,r}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\widehat{B}P_{km+l,r}(x)=\widehat{B}^mP_{k+l,r}(x)=P_{k(m+1)+l,r}(x)$$

получаем

$$P_{k(m+1)+l,r}(x)=\sum_{p=1}^{\infty}a_pk_p^m\varphi_p(x),$$

откуда

$$\frac{P_{k(m+1)+l,r}(x)}{k_1^m}=\sum_{p=1}^{\infty}a_p\left(\frac{k_p}{k_1}\right)^m\varphi_p(x), \tag{6}$$

$$\frac{P_{k(m+1)+l,r}(1-\alpha_0^{(r)})}{k_1^m}=\sum_{p=1}^{\infty}a_p\left(\frac{k_p}{k_1}\right)^m\varphi_p(1-\alpha_0^{(r)}). \tag{7}$$

Если $\overline{\lambda}_s$ и r таковы, что соответствующая краевая задача имеет единственное наименьшее по модулю собственное значение $\mu_1=\frac{1}{k_1}$ и $a_1\neq 0$, то при $p>1$ $|k_1|>|k_p|$.

Деля (6) на (7) и переходя к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n,r}(x)}{P_{n,r}(1-\alpha_0^{(r)})}=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(1-\alpha_0^{(r)})},\quad n=k(m+1)+l, \tag{8}$$

где $\varphi_1(x)$ — собственная функция оператора L, отвечающая наименьшему по модулю собственному значению μ_1. В частности, при $s=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ получим известный результат С. Н. Бернштейна [2, стр. 502]:

$$(P_{n,0}(x)=S_n(x),\quad P_{n,1}(x)=C_n(x)),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(x)}{S_n(1)}=\sin\frac{\pi}{2}x,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_n(x)}{C_n(0)}=\cos\frac{\pi}{2}x.$$

Последние равенства справедливы при любых конечных x.

Полученное выше асимптотическое равенство (8) можно использовать для уточнения одного результата Я. Тагамлицкого, касающегося разложения любой регулярно монотонной функции в ряд по регулярно монотонным полиномам [7, стр. 199]. Именно, справедлива (при прежних предположениях относительно $\overline{\lambda}_s$ и r) следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть $f(x)$ — регулярно монотонная с бесконечным порядком монотонности функция с типовыми числами* (1). *Тогда она может быть представлена в виде*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nP_{n,r}(x)+A\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(1-\alpha_0^{(r)})},$$

где C_n и A — некоторые неотрицательные постоянные.

Доказательство теоремы очевидно, если учесть, что для данных типовых чисел формула Тагамлицкого [7] примет вид

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_{n,r}(x) + A \lim_{n\to\infty} \frac{P_{n,r}(x)}{P_{n,r}(1-\alpha_0^{(r)})},$$

а последний предел вычисляется по формуле (7).

Замечание. Полученные здесь результаты впервые были сформулированы автором в работе [5, теоремы 7, 8], где они приведены без доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн, Собр. соч., т. 1, 32, Изд-во АН СССР, М., 1954.
2. С. Н. Бернштейн, Собр. соч., т. 2, 100, Изд-во АН СССР, М., 1954.
3. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, М., 1954.
4. В. Б. Ожегов, О некоторых свойствах обобщенных полиномов Аппеля, Автореферат канд. дисс., Л., 1954.
5. Г. А. Согомонова, Некоторые свойства экстремальной последовательности регулярно монотонных полиномов, ДАН СССР, т. 173, № 5, 1967.
6. Г. А. Согомонова, Некоторые экстремальные задачи для циклически монотонных полиномов, Уч. зап. Ленинградского педагогического института, 302, 1967.
7. Я. Тагамлицкий, Изв. Матем. инст. Бълг. АН, т. 3, вып. 2, 1959, стр. 187.

Поступила 2.II 1968 г.

Ленинградский механический институт