УДК 518.5:512.13

Новые формулы, удобные для аналитического описания геометрических фигур

О. В. Зенкин

В настоящей работе предлагаются новые формулы, позволяющие в простой аналитической форме записать уравнение геометрической фигуры, при условии, что фигура ограничена кусочно-гладкими функциями. Предлагаемые формулы могут найти широкое практическое применение: в задачах оптимального раскроя материалов, распознавания геометрических образов, приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных и т. д.

1°. Введем в рассмотрение функцию, зависящую от m переменных:

$$Z_1(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_m, \tag{1}$$

где

$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

$$\gamma_2 = -(|a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + \ldots + |a_{m-1} - a_m|),$$

$$\gamma_3 = (||a_1 - a_2| - a_3| + ||a_1 - a_2| - a_4| + \ldots + ||a_{m-2} - a_{m-1}| - a_m|),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_m = (-1)^{m+1} |||\ldots|a_1 - a_2| - a_3| - \ldots - a_m|,$$

a_i — действительные переменные ($i = 1, 2, \ldots, m$). Количество слагаемых в каждом γ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) равно C_m^k.

Введем еще одну функцию от m переменных:

$$Z_2(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m, \tag{2}$$

где

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

$$\delta_2 = |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + \ldots + |a_{m-1} - a_m|,$$

$$\delta_3 = -(||a_1 - a_2| + a_3| + ||a_1 - a_2| + a_4| + \ldots + ||a_{m-2} - a_{m-1}| + a_m|),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta_m = (-1)^m |||\ldots|a_1 - a_2| + a_3| + \ldots + a_m|,$$

a_i — действительные переменные ($i = 1, 2, \ldots, m$). Количество слагаемых в каждом δ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) равно C_m^k.

Рассмотрим свойства функции $Z_1(a_1, \ldots, a_m)$ из (1).

1. Если $a_i \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), то $Z_1 \geqslant 0$ ($Z_1 = 0$ при $a_i > 0$, $a_k = 0$, $i \neq k$, $k = 1, 2, \ldots, m$).
2. Если $a_i \geqslant 0$, $a_k < 0$, $i \neq k$ ($i, k = 1, 2, \ldots, m$), то $Z_1 < 0$.
3. Если $a_i < 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), то $Z_1 < 0$.

Рассмотрим свойства функции $Z_2(a_1, \ldots, a_m)$ из (2).

1. Если $a_i \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), то $Z_2 \geqslant 0$.
2. Если $a_i \geqslant 0$, $a_k < 0$, $i \neq k$ ($i, k = 1, 2, \ldots, m$), то $Z_2 \geqslant 0$ ($Z_2 = 0$ при $a_i = 0$, $a_k < 0$, $i \neq k$).
3. Если $a_i < 0$ ($i = 1, 2, \ldots, m$), то $Z_2 < 0$.

Теорема 1. *Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_m$ — фигуры в n-мерном пространстве, определяемые неравенствами*

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0, \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0.$$

Тогда фигура M, определяемая неравенством

$$Z_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) \geqslant 0, \tag{3}$$

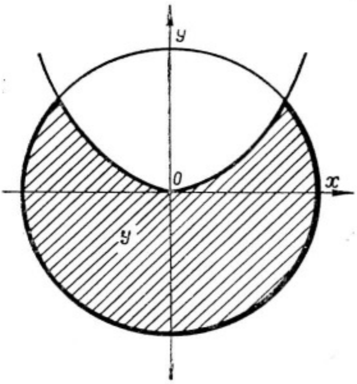

Рис. 1.

есть пересечение фигур $M_1, M_2, \ldots, M_m$.

Примечание 1. Если $M_1, M_2, \ldots, M_m$ — области в n-мерном пространстве, при пересечении которых получается область M, то неравенство (3) определяет область M, а уравнение

$$Z_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) = 0 \tag{4}$$

определяет границу этой области.

Доказательство теоремы следует из свойств функции $Z_1(a_1, \ldots, a_m)$.

Теорема 2. *Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_m$ — фигуры в n-мерном пространстве, определяемые неравенствами*

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0, \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0.$$

Тогда фигура M, определяемая неравенством

$$Z_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) \geqslant 0, \tag{5}$$

есть объединение фигур $M_1, M_2, \ldots, M_m$.

Примечание 2. Если $M_1, M_2, \ldots, M_m$ — пространственные области, при объединении которых получается область M, то неравенство (5) определяет область M, а уравнение

$$Z_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) = 0 \tag{6}$$

определяет границу этой области.

Доказательство теоремы основано на свойствах функции $Z_2(a_1, \ldots, a_m)$.

2°. Рассмотрим примеры на применение формул (1) и (2).

Пример 1. Предположим, что на плоскости xOy заданы две области такими неравенствами: $\varphi_1 = x^2 - y \geqslant 0$, $\varphi_2 = 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0$. Необходимо составить уравнение границы области G (рис. 1). Используя формулу (1) при $m = 2$, получим

$$Z_1(a_1, a_2) = a_1 + a_2 - |a_1 - a_2|. \tag{7}$$

Отметим, что формула (7) совпадает с формулой «R-конъюнкции» при $\alpha = 1$ [1]. Применяя формулу (7), найдем уравнение границы области G:

$$Z_1(\varphi_1, \varphi_2) = 1 - y^2 - y - |2x^2 - y - 1 + y^2| = 0.$$

Пример 2. Пусть на плоскости xOy заданы области G_1, G_2, G_3 такими неравенствами: $\varphi_1 = x^2 - y - 1 \geqslant 0$, $\varphi_2 = x^2 + (y + 2)^2 - 1 \geqslant 0$, $\varphi_3 = -x - 2|y| + 6 \geqslant 0$. Область G, полученная от пересечения областей G_1, G_2, G_3, изображена на рис. 2, *а*. Пусть требуется составить уравнение границы области G.

В (1) положим $m = 3$, получим

$$Z_1(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 + a_3 - |a_1 - a_2| - |a_1 - a_3| - |a_2 - a_3| + ||a_1 - a_2| - a_3|. \qquad (8)$$

Тогда уравнение границы области G будет выглядеть так:

$$Z_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 2x^2 + (y+2)^2 - y - x - 2|y| + 4 - |y + (y+2)^2| - |x^2 - y + x + 2|y| - 7| - |x^2 + (y+2)^2 + x + 2|y| - 7| + ||y + (y+2)^2| + x + 2|y| - 6| = 0.$$

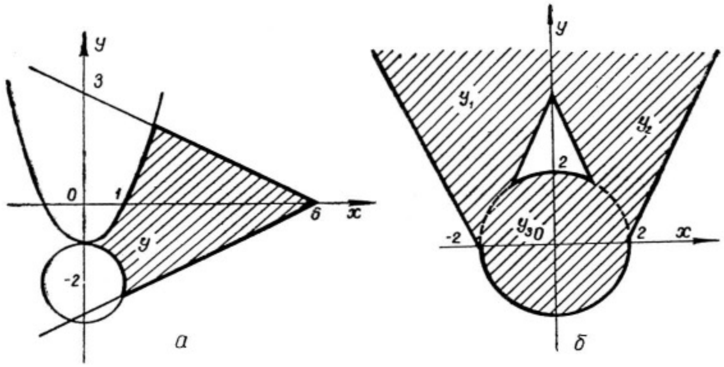

Рис. 2.

Пример 3. Предположим, что на плоскости xOy заданы области G_1, G_2, G_3 (рис. 2, *б*) соответственно неравенствами: $\varphi_1 = y - 2|x+2| \geqslant 0$, $\varphi_2 = y - 2|x-2| \geqslant 0$ и $\varphi_3 = 4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$. Составим уравнение границы двухсвязной области G, полученной в результате объединения областей G_1, G_2, G_3. Положив в (2) $m = 3$, получим:

$$Z_2(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 + a_3 + |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_2 - a_3| - ||a_1 - a_2| + a_3|. \qquad (9)$$

Тогда уравнение

$$Z_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 2y - 2|x+2| - 2|x-2| + 4 - x^2 - y^2 + 2||x-2| - |x+2|| + |y - 2|x+2| - 4 + x^2 + y^2| + |y - 2|x-2| - 4 + x^2 + y^2| - ||2|x-2| - 2|x+2|| + 4 - x^2 - y^2| = 0$$

есть уравнение границы области G.

3°. Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (1). Рассматривая формулу (1) при $a_m = 0$, получим

$$Z_1(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, 0) = \sum_{i=1}^{m-1} (a_i - |a_i|). \qquad (10)$$

Легко видеть, что полученная формула (10) совпадает с соответствующей формулой из [2].

Рассмотрим свойства функции $Z_1(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, 0)$.

1. Если $a_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, то $Z_1 = 0$.
2. Если $a_i \geqslant 0$, $a_k < 0$, $i \neq k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m-1)$, то $Z_1 < 0$.
3. Если $a_i < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, то $Z_1 < 0$.

Теорема 3. *Пусть* $M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$ — *геометрические фигуры в* n-*мерном пространстве, определяемые неравенствами* $\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0$, $\varphi_2(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \ldots, \varphi_{m-1}(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$; *тогда фигура* M, *определяемая уравнением*

$$Z_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}) = 0,$$

есть пересечение фигур $M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}$.

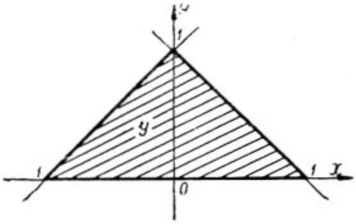

Рис. 3.

Доказательство теоремы вытекает из свойств функции $Z_1(a_1, \ldots, a_{m-1}, 0)$.

Рассмотрим пример на применение формулы (10).

Пример 4. Предположим, что на плоскости xOy заданы области M_1, M_2, M_3 соответственно неравенствами: $y \geqslant 0$, $1 - x - y \geqslant 0$, $1 + x - y \geqslant 0$. Составим уравнение области G, полученной в результате пересечения областей M_1, M_2, M_3 (рис. 3). Применяя формулу (10) при $m = 4$, получим

$$y + 1 - x - y + 1 + x - y - |y| - |1 - x - y| - |1 + x - y| = 0. \quad (11)$$

Уравнению (11) удовлетворяют все точки области G и только эти точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Рвачев, Геометрические приложения алгебры логики, «Техника», К., 1967.
2. О. В. Зенкин, Новые классы формул, удобные для аналитического описания геометрических фигур, сб. Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям, ч. 1, Днепропетровск, 1967.

Поступила 5.VIII 1968 г.

Днепропетровский государственный университет