УДК 517.53:517.947.42

К решению задач о комплексном x-аналитическом потенциале для сферического кругового диска

А. А. Капшивый, Н. В. Ногин

Постановка и общие указания по методу решения задач о комплексном x-аналитическом потенциале для сферического кругового диска даны в работах Г. Н. Положего [1, 2]. При помощи основного интегрального представления x-аналитических функций Г. Н. Положий сводит решение этих задач к решению задачи Римана — Гильберта для аналитических функций.

В данной статье показано, что решение задач о комплексном x-аналитическом потенциале для сферического кругового диска методом Г. Н. Положего сводится к задаче о скачке для аналитических функций. Это позволило существенно упростить решение указанных задач.

Пусть G — правая полуплоскость $z = x + iy$ с разрезом C вдоль дуги окружности $z = Re^{i\theta}\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \alpha; \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Требуется определить функцию $\widetilde{f}(z) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y)$, x-аналитическую в G, непрерывно продолжаемую на границу и удовлетворяющую краевым условиям:

$$\left(\beta_1 \widetilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r}\right)_{|z|=R-0} = \widetilde{\Phi}_1(\theta) \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \alpha\right), \tag{1}$$

$$\left(\beta_1 \widetilde{u} - \beta_2 \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r}\right)_{|z|=R+0} = \widetilde{\Phi}_2(\theta) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \alpha\right), \tag{2}$$

$$\widetilde{v}|_{x=0} = 0 \qquad (-R \leqslant y < \infty), \tag{3}$$

$$\widetilde{v}|_{x=0} = D \qquad (-\infty < y \leqslant -R), \tag{4}$$

где $\widetilde{\Phi}_1(\theta)$, $\widetilde{\Phi}_2(\theta)$ — заданные достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции от θ; D — действительная постоянная (заранее не задается); β_1, β_2 — известные действительные постоянные, одновременно не равные нулю. В случае определения только действительной части функции $\widetilde{f}(z)$ задача (1) — (4) является задачей теории осесимметричного потенциала для сферического кругового диска.

Решение задачи (1) — (4), следуя Г. Н. Положему [1], при помощи основного интегрального представления x-аналитических функций ищем в виде

$$\widetilde{f}(z) = \operatorname{Re} \int_{\Gamma} f(\zeta)(z-\zeta)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z}+\zeta)^{-\frac{1}{2}} d\zeta + i \operatorname{Im} \int_{\Gamma} f(\zeta)(\zeta - iy) \times$$

$$\times (z-\zeta)^{-\frac{1}{2}} (\bar{z}+\zeta)^{-\frac{1}{2}} d\zeta, \tag{5}$$

где Γ — контур в G, соединяющий произвольную (не фиксированную) точку на участке L $(-R \leqslant y < \infty)$ мнимой оси с точкой $z = x + iy$; $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — функция, аналитическая в G, причем

$$v(0, y) = 0 \qquad (-\infty < y < \alpha), \tag{6}$$

а в окрестности бесконечно удаленной точки $f(z)$ регулярна и имеет нуль не ниже первого порядка; $\arg (z-\zeta)\overline{(z+\zeta)}$ в начальной точке контура Γ равен нулю.

Для предельных значений функции $\widetilde{f}(z)$, определенной равенством (5), при подходе к краям разреза C имеют место представления [1,3]:

$$\widetilde{f}(t^{+}) = \widetilde{u}^{+}(\theta) + i\widetilde{v}^{+}(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{Re} \left\{ f(\zeta^{+}) e^{\frac{i}{2}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \right\} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\sin\theta - 2\sin\varphi}} +$$

$$+ i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} R^2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\zeta^{+})}{d\zeta^{+}} e^{\frac{3i}{2}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \right\} \sqrt{2\sin\theta - 2\sin\varphi}\, d\varphi, \tag{7}$$

$$\widetilde{f}(t^{-}) = \widetilde{u}^{-}(\theta) + i\widetilde{v}^{-}(\theta) = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{Re} \left\{ f(\zeta^{-}) e^{\frac{i}{2}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \right\} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\sin\theta - 2\sin\varphi}} -$$

$$- i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} R^2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{df(\zeta^{-})}{d\zeta^{-}} e^{\frac{3i}{2}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \right\} \sqrt{2\sin\theta - 2\sin\varphi}\, d\varphi + iD, \tag{8}$$

где $t^{+} = (R-0)e^{i\theta}$, $t^{-} = (R+0)e^{i\theta}$, $\zeta^{+} = (R-0)e^{i\varphi}$, $\zeta^{-} = (R+0)e^{i\varphi}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi < \theta \leqslant \alpha\right)$. Далее, D — действительная постоянная та же, что и в краевом условии (4), причем

$$D = -\pi \operatorname{Im} \underset{z=\infty}{\text{Выч}}\, f(z). \tag{9}$$

При помощи интегральных представлений (7), (8), интегрального представления скачка x-аналитической функции $\widetilde{f}(z)$ вдоль разреза C [1, 2] и формул обращения основного интегрального представления x-аналитических функций в полярной системе координат [1, 2], учитывая то, что $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial r} = r^{-2} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \sin\theta}$, из (1), (2) получаем краевые условия для аналитической функции $f(z)$:

$$\beta_1 \operatorname{Re} \{[f(z)]^{\pm} e^{\frac{i}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\}_{|z|=R} + \beta_2 \operatorname{Im} \left\{\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^{\pm} e^{\frac{3i}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}_{|z|=R} = g(\theta),$$

$$\beta_1 \operatorname{Re} \{[f(z)]^{\pm} e^{\frac{i}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\}_{|z|=R} - \beta_2 \operatorname{Im} \left\{\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^{\pm} e^{\frac{3i}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}_{|z|=R} = h(\theta)$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \alpha\right), \tag{10}$$

где $g(\theta)$, $h(\theta)$ — известные функции:

$$g(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{d\theta} \int\limits_{\alpha}^{\theta} \frac{\widetilde{\Phi}_1(\varphi) - \widetilde{\Phi}_2(\varphi)}{\sqrt{2\sin\varphi - 2\sin\theta}} \cos\varphi d\varphi,$$

$$h(\theta) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{d\theta} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{\widetilde{\Phi}_1(\varphi) + \widetilde{\Phi}_2(\varphi)}{\sqrt{2\sin\theta - 2\sin\varphi}} \cos\varphi d\varphi.$$

Запишем краевые условия (10) в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\beta_1 [f(z)]^{\pm} e^{\frac{i}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} - \beta_2 \frac{z}{R}\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^{\pm} e^{\frac{i}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}_{|z|=R} = g(\theta),$$

$$(10')$$

$$-\operatorname{Im}\left\{\beta_1 [f(z]^{\pm} e^{\frac{i}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)} - \beta_2 \frac{z}{R}\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^{\pm} e^{\frac{i}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}_{|z|=R} = h(\theta)$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \alpha\right)$$

или

$$\left\{\left[\beta_1 f(z) - \frac{\beta_2 z}{R}\frac{df(z)}{dz}\right]^{\pm}\right\}_{|z|=R} = \varphi(\theta) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \alpha\right), \tag{11}$$

где $\varphi(\theta) = [g(\theta) - ih(\theta)]\, e^{-\frac{i}{2}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$.

Введем функцию

$$F(z) = \beta_1 f(z) - \frac{\beta_2 z}{R}\frac{df(z)}{dz}, \tag{12}$$

аналитическую в G.

Учитывая то, что $\operatorname{Im} F(z)|_{x=0} = 0$, аналитически продолжим функцию $F(z)$ по принципу симметрии в левую полуплоскость. Приходим к задаче о скачке

$$F^{+}(t) - F^{-}(t) = \varphi^{*}(\theta) \quad (t = Re^{i\theta};\ -\pi-\alpha < \theta < \alpha), \tag{13}$$

где

$$\varphi^{*}(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta), & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta < \alpha, \\ \overline{\varphi(-\pi-\theta)}, & \text{если } -\pi-\alpha < \theta \leqslant -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{13'}$$

Решение задачи (13), имеющее на бесконечности нуль первого порядка, дается интегралом типа Коши [4]

$$F(z) = \frac{R}{2\pi} \int\limits_{-\pi-\alpha}^{\alpha} \frac{\varphi^*(\omega)\, e^{i\omega} d\omega}{\mathrm{R}e^{i\omega} - z} \tag{14}$$

Итак, функция $F(z)$ определена. После этого для определения функции $f(z)$ имеем уравнение (12). Рассмотрим три случая.

1. Пусть $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$ (случай краевых условий первого рода). Тогда

$$f(z) = F(z) = \frac{R}{2\pi} \int\limits_{-\pi-\alpha}^{\alpha} \frac{\varphi^*(\omega)\, e^{i\omega} d\omega}{\mathrm{R}e^{i\omega} - z}. \tag{15}$$

2. Пусть $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -1$ (случай краевых условий второго рода). Имеем

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{R}{z} F(z) = \frac{R^2}{2\pi z} \int\limits_{-\pi-\alpha}^{\alpha} \frac{\varphi^*(\omega)\, e^{i\omega} d\omega}{\mathrm{R}e^{i\omega} - z}.$$

Отсюда, учитывая то, что $f(\infty) = 0$, получаем

$$f(z) = \frac{R}{2\pi} \int\limits_{-\pi-\alpha}^{\alpha} \varphi^*(\omega) \ln\left(1 - \frac{\mathrm{R}e^{i\omega}}{z}\right) d\omega, \tag{16}$$

где для логарифма берется ветвь, исчезающая при $z = \infty$.

Для аналитичности функции $f(z)$ в точке $z = 0$ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{-\pi-\alpha}^{\alpha} \varphi^*(\omega)\, d\omega = 0. \tag{17}$$

В соответствии с равенством (13′) условие (17) записывается в виде

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \mathrm{Re}\, \varphi(\omega)\, d\omega = 0. \tag{17′}$$

Итак, в этом случае, для разрешимости задачи должно выполняться условие (17′).

3. Пусть $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$. В этом случае $f(z)$ находится как решение линейного дифференциального уравнения (12), исчезающее на бесконечности. Имеем

$$f(z) = \frac{R}{\beta_2} z^{\frac{\beta_1}{\beta_2}} \int\limits_{z}^{\infty} F(\zeta)\, \zeta^{-\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}+1\right)} d\zeta, \tag{18}$$

где функция $F(z)$ определяется равенством (14). Легко убедиться в том, что функция $f(z)$, определенная равенством (18), аналитическая в G (включая точку $z = 0$) и на бесконечности имеет нуль не ниже первого порядка.

Подставляя найденную функцию $f(z)$ в равенство (5), получаем искомое решение задачи (1) — (4) о комплексном x -аналитическом потенциале для сферического кругового диска. Запишем это решение для каждого из случаев 1—3 в отдельности.

1. Пусть $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$. Имеем

$$\widetilde{f}(z) = -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{\varphi(\omega)Re^{i\omega}d\omega}{\sqrt{x^2-(Re^{i\omega}-iy)^2}} + \frac{i}{2}\operatorname{Re}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\left(\frac{Re^{i\omega}-iy}{\sqrt{x^2-(Re^{i\omega}-iy)^2}} + i\right)\times$$

$$\times\varphi(\omega)Re^{i\omega}d\omega. \tag{19}$$

При этом в соответствии с (9)

$$D = -R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}[\operatorname{Re}\varphi(\omega)\sin\omega + \operatorname{Im}\varphi(\omega)\cos\omega]\,d\omega. \tag{20}$$

2. Пусть $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -1$. Имеем

$$\widetilde{f}(z) = \frac{R}{4\pi}\int_{-\bar{z}}^{z}\left[\int_{-\pi-\alpha}^{\alpha}\varphi^*(\omega)\ln\left(1-\frac{Re^{i\omega}}{\zeta}\right)d\omega\right](1+\zeta-iy)(z-\zeta)^{-\frac{1}{2}}(\bar{z}+\zeta)^{-\frac{1}{2}}d\zeta, \tag{21}$$

где интегрирование по $\zeta = \xi + i\eta$ ведется вдоль произвольного контура Γ в области $G + G^*$ (G^* — область симметричная с G относительно мнимой оси), соединяющего точки $-\bar{z}$ и z и пересекающего мнимую ось на участке L ($-R \leqslant y < \infty$). Для постоянной D в этом случае имеем равенство

$$D = R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}[\operatorname{Re}\varphi(\omega)\sin\omega + \operatorname{Im}\varphi(\omega)\cos\omega]\,d\omega. \tag{22}$$

Напомним, что для существования решения (21) должно выполняться условие разрешимости (17′).

3. Пусть $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$. В этом случае, в соответствии с (18) находим

$$\widetilde{f}(z) = \frac{R}{2\beta_2}\int_{-\bar{z}}^{z}\left[\zeta^{\frac{\beta_1}{\beta_2}}\int_{\zeta}^{\infty}F(\tau)\tau^{-\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}+1\right)}d\tau\right](1+\zeta-iy)(z-\zeta)^{-\frac{1}{2}}(\bar{z}+\zeta)^{-\frac{1}{2}}d\zeta, \tag{23}$$

где $F(z)$ определяется равенством (14), а интегрирование по ζ ведется вдоль контура Γ такого же вида, как и в случае формулы (21).

Для постоянной D имеем равенство

$$D = \frac{R^2}{\beta_1+\beta_2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha}[\operatorname{Re}\varphi(\omega)\sin\omega + \operatorname{Im}\varphi(\omega)\cos\omega]\,d\omega. \tag{24}$$

Замечание. По аналогии с тем, как были решены здесь задачи о комплексном x-аналитическом потенциале для сферического кругового диска, сведением к задаче о скачке для аналитических функций решаются задачи о комплексном x-аналитическом потенциале для плоского кругового диска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий, Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. p-Аналитические и (p, q)-аналитические функции и некоторые их применения, Изд-во КГУ, К., 1965.

2. Г. Н. Положий, О предельных значениях и формулах обращения вдоль разрезов основного интегрального представления p-аналитических функций с характеристикой $p = x^k$. II, УМЖ, т. 17, № 2, 1965.
3. А. А. Капшивый, Г. Ф. Маслюк, Решение смешанной осесимметричной задачи теории упругости для полупространства методом p-аналитических функций, Прикладная механика, т. 3, № 7, 1967.
4 Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, М., 1963.

Поступила 13 V. 1969 г.
Киевский государственный университет