УДК 517.946

Улучшение некоторых оценок на бесконечности решений однородного уравнения Шредингера с потенциалом, возрастающим в части пространства

Ю. Б. Орочко

Пусть M — некоторое неограниченное множество точек n-мерного пространства R_n, $n \geqslant 1$, M_δ— δ-окрестность этого множества, т. е. совокупность всех точек, расстояние которых от M не превышает некоторого числа δ. Предположим, что $q(x)$ $(x \in R_n)$ — бесконечно дифференцируемая вещественная функция, удовлетворяющая неравенству

$$q(x) \geqslant C|x|^\alpha, \quad C > 0, \quad \alpha > 0, \tag{1}$$

для всех точек $x \in M_\delta$. Рассмотрим однородное уравнение Шредингера

$$-\Delta u + q(x) u = 0. \tag{2}$$

Данная заметка посвящена доказательству следующего свойства этого уравнения.

Т е о р е м а. *Если некоторое решение уравнения* (2) *во всем пространстве удовлетворяет a* priori *неравенству*

$$|u(x)| \leqslant C_1 |x|^\beta, \quad x \in M_\delta, \tag{3}$$

с какими-нибудь числами $\beta > 0$, $C_1 > 0$, *то при любом положительном* k *справедлива асимптотика*

$$|u(x)| \underset{\substack{|x| \to \infty \\ x \in M}}{=} O\left(\frac{1}{|x|^k}\right). \tag{4}$$

Решения однородного уравнения Шредингера, удовлетворяющие неравенству (3), возникают в спектральной теории оператора Шредингера с потенциалом, обладающим свойством (1) [1, теорема 2]. Мы имеем в виду его собственные функции. Представляет интерес тот случай, когда выполнено неравенство (1) и, вместе с тем, оператор Шредингера имеет непрерывный спектр. Тогда сформулированная выше теорема позволяет утверждать, что собственные функции, соответствующие непрерывному спектру, убывают к нулю при $|x| \to \infty$, $x \in M$, с асимптотикой (4).

Доказательство теоремы вытекает из свойств функций от оператора Шредингера, изученных в работе [1]. Рассмотрим минимальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $-\Delta + q(x)$ в $L_2(R_n)$. Пусть A — какое-нибудь его самосопряженное расширение, E_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — соответствующее разложение единицы. Определим функции $\gamma_0(\lambda, t) \equiv 1$,

$$\gamma_k(\lambda, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}\,(t - \tau)\, \gamma_{k-1}(\lambda, \tau)\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots, \ t > 0,$$

и рассмотрим операторы $\gamma_k(A, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_k(\lambda, t)\, dE_\lambda$. Как показано в работе [1], при $k \geqslant \left[\frac{n+3}{2}\right]$ область определения $\gamma_k(A, t)$ содержит $C_0^\infty(R_n)$. Эти операторы имеют интегральный характер

$$\gamma_k(A, t) f(x) = \int\limits_{|x-y| \leqslant t} \Gamma^{(k)}(x, y, t) f(y)\, dy,$$

$f \in C_0^\infty(R_n)$, $x \in R_n$, причем ядра $\Gamma^{(k)}(x, y, t)$ при каждом $t > 0$ симметричны $(\Gamma^{(k)}(x, y, t) = \overline{\Gamma^{(k)}(y, x, t)})$, непрерывны по совокупности переменных при $|x - y| \leqslant t$ и равны нулю, когда $|x - y| = t$. В дальнейших рассуждениях всегда предполагается, что $k \geqslant \left[\frac{n+3}{2}\right]$.

Л е м м а. *Если функция* $u(x)$ *является решением уравнения* (2) *в* R_n, *то*

$$\int\limits_{|x-y| \leqslant t} \Gamma^{(k)}(x, y, t)\, u(y)\, dy = \frac{t^{2k}}{(2k)!} u(x), \quad x \in R_n, \ t > 0. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения ничем не отличается от доказательства формулы (17) работы [1]; нужно только учесть, что $\frac{t^{2k}}{(2k)!} = \gamma_k(0, t)$.

Формулу (5) мы используем следующим образом. Пусть x — любая точка из M. Если выполняется неравенство (3), а $t < \delta$, то

$$\int\limits_{|x-y| \leqslant t} |u(y)|^2\, dy \leqslant C_2 (|x| + \delta)^{2\beta},$$

C_2 — постоянная, и применение неравенства Коши — Буняковского к левой части (5) дает нам оценку

$$|u(x)|^2 \leqslant C_2 \frac{(2k!)^2}{t^{4k}} \int\limits_{|x-y|\leqslant t} |\Gamma^{(k)}(x, y, t)|^2 dy\, (|x| + \delta)^{2\beta}. \tag{6}$$

Чтобы доказать нашу теорему, установим, что при достаточно малых $t > 0$ $\int\limits_{|x-y|\leqslant t} |\Gamma^{(k)}(x, y, t)|^2 dy$ при $|x| \to \infty$, $x \in M$, убывает к нулю быстрее некоторой степени величины $\dfrac{1}{|x|}$, причем эта степень неограниченно возрастает с увеличением k.

Зафиксируем точку $x_0 \in R_n$, числа $r > 0$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$ и, наряду с функцией $q(x)$, рассмотрим какую-нибудь бесконечно дифференцируемую вещественную функцию $q_0(x)$, совпадающую с $q(x)$ при $|x - x_0| \leqslant r + 2T$, тождественно равную постоянной при достаточно больших значениях $|x|$, и такую, что

$$\min_{x \in R_n} q_0(x) = \min_{|x-x_0| \leqslant r+2T+\varepsilon} q(x).$$

Минимальный оператор, построенный в $L_2(R_n)$ по дифференциальному выражению $-\Delta + q_0(x)$, самосопряжен; обозначим через $\psi_0(x, y, \lambda)$ и $d\varrho_0(\lambda)$ соответственно его спектральное ядро и спектральную меру*. При $|x - x_0| \leqslant r$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{|x-y|\leqslant t} |\Gamma^{(k)}(x, y, t)|^2 dy = \int\limits_{|x-y|\leqslant t} |\Gamma^{(k)}(y, x, t)|^2 dy =$$

$$= \int\limits_{q_0}^{\infty} |\gamma_k(\lambda, t)|^2 \psi_0(x, x, \lambda)\, d\varrho_0(\lambda), \quad k \geqslant \left[\frac{n+3}{2}\right]. \tag{7}$$

Здесь $q_0 = \min\limits_{x \in R_n} q_0(x)$, интеграл в правой части имеет нижний предел q_0, так как спектр заведомо находится на полуоси $\lambda \geqslant q_0$. Равенство (7) получено в [1, формулы (30), (31)] для $k = \left[\dfrac{n+3}{2}\right]$, правда, вспомогательный потенциал $q_0(x)$ удовлетворял условиям, несколько отличным от приведенных выше. Это различие, как нетрудно проверить, не влияет на ход доказательства формулы (7). При $k > \left[\dfrac{n+3}{2}\right]$ доказательство повторяет рассуждения, которые используются в случае $k = \left[\dfrac{n+3}{2}\right]$. Зафиксируем теперь числа r, T, ε так, чтобы $r + 2T + \varepsilon < \delta$, положим в формуле (7) $x = x_0$, а в качестве x_0 возьмем любую точку множества M, у которой $|x_0| > 2\delta$. Из определения функций $\gamma_k(\lambda, t)$ вытекает оценка $|\gamma_k(\lambda, t)| \leqslant \dfrac{t^k}{k!\, \lambda^{\frac{k}{2}}}$, $\lambda > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Применяя ее к правой части равенства (7), получаем:

$$\int\limits_{|x_0-y|\leqslant t} |\Gamma^{(k)}(x_0, y, t)|^2 dy \leqslant \frac{t^{2k}}{(k!)^2} \int\limits_{q_0}^{\infty} \frac{\psi_0(x_0, x_0, \lambda)}{\lambda^k}\, d\varrho_0(\lambda). \tag{8}$$

* Мы придерживаемся терминологии работы [2].

Так как в δ-окрестности точки x_0 справедлива оценка (1), то

$$q_0 \geqslant C(|x_0| - \delta)^\alpha > C\delta^\alpha.$$

Пусть $k = \left[\frac{n+3}{2}\right] + l$, $l = 1, 2, \ldots$ Для оценки правой части (8) воспользуемся соотношением, справедливым при $\lambda \geqslant q_0$:

$$\frac{1}{\lambda^k} \leqslant \frac{1}{q_0^l \lambda^{\left[\frac{n+3}{2}\right]}} \leqslant \frac{C_3}{C^l (|x_0| - \delta)^{\alpha l} (\lambda - q_0 + 1)^{\left[\frac{n+3}{2}\right]}},$$

C_3 — постоянная. Используя его, приходим к неравенству

$$\int\limits_{|x_0 - y| \leqslant t} |\Gamma^{(k)}(x_0, y, t)|^2 \, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t^{2k} C_3}{(k!)^2 C^l (|x_0| - \delta)^{\alpha l}} \int\limits_{q_0}^{\infty} \frac{\psi_0(x_0, x_0, \lambda)}{(\lambda - q_0 + 1)^{\left[\frac{n+3}{2}\right]}} \, d\varrho_0(\lambda).$$

Можно утверждать, что существует постоянная C_4 такая, что

$$\int\limits_{q_0}^{\infty} \frac{\psi_0(x, x, \lambda)}{(\lambda - q_0 + 1)^{\left[\frac{n+3}{2}\right]}} \, d\varrho_0(\lambda) \leqslant C_4, \quad x \in R_n,$$

одновременно для всех бесконечно дифференцируемых потенциалов $q_0(x)$, тождественно постоянных при достаточно больших значениях $|x|$. Этот результат следует из леммы 1 и примечания на стр. 41 работы [1]. Окончательно получаем оценку

$$\int\limits_{|x_0 - y| \leqslant t} |\Gamma^{(k)}(x, y, t)|^2 \, dy \leqslant \frac{C_3 C_4 t^{2k}}{(k!)^2 C^l (|x| - \delta)^{\alpha l}},$$

$$x \in M, \; k = \left[\frac{n+3}{2}\right] + l, \; l = 1, 2, \ldots, \; 0 < t < r + 2T + \varepsilon < \delta$$

(мы вернулись к обозначению x вместо x_0). Полученное соотношение вместе с (6) доказывает нашу теорему.

З а к л ю ч и т е л ь н ы е з а м е ч а н и я. Тем же путем может быть доказана более общая теорема. Можно предполагать, что $q(x) \geqslant P^\alpha(|x|)$, $x \in M_\delta$, $\alpha > 0$, где $P(t)$ $(0 < t < \infty)$ — непрерывная монотонно возрастающая неограниченная функция такая, что

$$\frac{P(t + \delta)}{P(t - \delta)} \leqslant \mathrm{const}$$

для достаточно больших значений t (например, $P(t) = \ln t$). В таких предположениях из априорной оценки $|u(x)| \leqslant CP^\beta(|x|)$, $x \in M_\delta$, $\beta > 0$, для некоторого решения $u(x)$ уравнения (2) следует асимптотика

$$|u(x)| \underset{\substack{|x| \to \infty \\ x \in M}}{=} O\left(\frac{1}{P^k(|x|)}\right)$$

с любым $k > 0$. Кроме того, необязательно рассматривать решения уравнения (2) во всем пространстве. Результат теоремы справедлив и для функций, являющихся решениями в части пространства, содержащей M_δ. Наконец, условие бесконечной дифференцируемости $q(x)$ можно заменить условием достаточной гладкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Б. Орочко, Некоторые оценки на бесконечности собственных функций оператора Шредингера, УМЖ, т. 19, № 3, 1967.
2. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.

Поступила 30.VII 1968 г.

Московский институт электронного машиностроения