жен в гильбертовом пространстве $L^2(\Gamma_1) \ominus \widehat{N}$ или $L^2(\Gamma_1) \ominus \widehat{M} \ominus \widehat{N}$ соответственно.

Заметим, что в работах [4 и 10] приводятся достаточные условия замкнутости $\widehat{N}$ и выполнения условия E.

Таким образом, пользуясь самосопряженностью оператора A в L^2 можно описать самосопряженный оператор B. Теория разложения по собственным функциям общих самосопряженных операторов (см., например, [7]) приложима, в частности, к операторам A и B.

В заключение отметим, что если $\mathfrak{L}$ — дифференциальное выражение Шредингера, а $B_1 = \frac{\partial}{\partial n} + \sigma(x)$, то по аналогии с п. 3 работы [4] удается построить самосопряженные операторы и в случае некоторых неограниченных областей.

Автор благодарит Ю. М. Березанского за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Барковский, Я. А. Ройтберг, О минимальном и максимальном операторах, соответствующих общей эллиптической задаче с неоднородными граничными условиями, УМЖ, т. 18, № 2, 1966.
2. М. Шехтер, Общие граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных, Математика, № 4 : 5, 1960.
3. В. В. Барковский, О функции Грина самосопряженного эллиптического оператора, порожденного дифференциальным выражениям и неоднородными граничными условиями, УМЖ, т. 18, № 2, 1966.
4. В. В. Барковский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, соответствующим общим эллиптическим задачам с собственным значением в граничных условиях, УМЖ, т. 19, № 1, 1967.
5. Ю. М. Березанский, Пространство с негативной нормой, УМН, т. 18, № 1, 1963.
6. Я. А. Ройтберг, Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений, ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964.
7. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
8. Я. А. Ройтберг, Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами, ДАН СССР, т. 180, № 3, 1968.
9. Я. А. Ройтберг, Формула Гріна і теорема про гомеоморфізми для загальних еліптичних граничних задач з граничними умовами, що не є нормальними, УМЖ, т. 21, № 3, 1969.
10. J. Ercolano and M. Schecter, Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems, Comm. Pure and Appl. Math., v. 18 № 1—2, 3, 1965.

Поступила 21.III 1968 г.,
после переработки — 10.XI 1969 г.
Институт математики АН УССР

УДК 513.6

Подгруппы норм в эллиптических кривых, определенных над локальным полем

О. Н. Введенский

Хотя основной целью данной заметки является изучение соотношения между замкнутыми подгруппами конечного индекса в группе рациональных над локальным полем определения точек эллиптической кривой и подгруппами норм, результат о совпадении порядка и показателя главного однородного пространства над этой кривой тоже представляет интерес. Кроме того, информация о соотношении между обоими классами подгрупп, которую мы получим, вытекает из равенства порядка и показателя (определения по [1]).

Указанные результаты известны для случая, когда локальное поле имеет нулевую характеристику [2,3]. В случае ненулевой характеристики основного поля они были неизвестными.

1. Равенство показателя и порядка главного однородного пространства над эллиптической кривой, определенной над локальным полем.

Пусть k — локальное поле, т. е. полное дискретно нормированное поле с конечным полем вычетов характеристики $p > 0$ (характеристика k произвольна); A — эллиптическая кривая над k (т. е. одномерное абелево многообразие над k) и V — главное однородное пространство над A.

Известно, что показатель V совпадает с сепарабельным показателем [2], поэтому далее говорим просто о показателе V.

Теорема 1. *Показатель V равен его порядку.*

Замечание 1. Напомним, что это известно для локальных полей нулевой характеристики [2]. Новым является случай ненулевой характеристики k.

Доказательство — по схеме Лихтенбаума [2]. Рассмотрим точную (строчки и столбцы) коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathrm{Br}\,k & \xrightarrow{1} & \mathrm{Br}\,k & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle\psi_1} & & \uparrow{\scriptstyle\psi_2} & & \\ 0 & \longrightarrow & [\mathrm{Pic}_0(V)]^G & \longrightarrow & [\mathrm{Pic}(V)]^G & \longrightarrow & Z \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle 1} \\ 0 & \longrightarrow & [\mathrm{Div}_0(V)]^G & \longrightarrow & [\mathrm{Div}(V)]^G & \longrightarrow & Z \end{array} \tag{1}$$

Обозначения и гомоморфизмы обычные, с единой оговоркой — дивизоры имеют сепарабельные носители над k (т. е. для дивизора $\Sigma n_P P$, $k(P)/k$ сепарабельны для всех P таких, что $n_P \neq 0$), $G = \mathrm{Gal}(k_s/k)$, k_s — сепарабельное замыкание поля k. Конструкцию ψ_1, ψ_2 легко понять по [4].

Изоморфизм j Касельса [5] (соответственно, определение) показывает, что индекс образа $[\mathrm{Pic}(V)]^G$ (соответственно, $[\mathrm{Div}(V)]^G$) в Z по строке диаграммы (1) совпадает с порядком (показателем) V.

Пусть порядок V равен n. Тогда существует $\mathfrak{D} \in [\mathrm{Pic}(V)]^G$ с $\deg \mathfrak{D} = n$. Утверждение теоремы 1 вытекает из двух фактов:

$$\psi_1([\mathrm{Pic}_0(V)]^G) = \frac{1}{n} Z/Z \ (\subset \mathrm{Br}\,k), \tag{2}$$

$$\psi_2(\mathfrak{D}) \subset \frac{1}{n} Z/Z. \tag{3}$$

Доказываем (2). Лихтенбаум [2] дал новую интерпретацию спаривания Тэйта, которая показывает, что спаривание класса коциклов, соответствующего V, с A_k по Тэйту дает подгруппу $\psi_1([\mathrm{Pic}_0(V)]^G)$ в $\mathrm{Br}\,k$ (прямая проверка не является слишком сложной). Отсюда по невырожденности спаривания Тэйта [6] получаем (2).

Доказываем (3). Пусть D — дивизор из класса $\mathfrak{D}$, рациональный над конечным расширением Галуа K/k, $\mathrm{Gal}(K/k) = H$. Пусть $L(D)$ — подпространство поля K_V-рациональных функций на V, дивизоры которых не меньше чем $-D$, а $\lambda' : K^n \to L(D)$ — фиксированный изоморфизм. λ' индуцирует биективное отображение λ из $P^{n-1}(K)$ на линейную систему $|D|$. Для $\sigma \in H$ определяем λ^σ формулой

$$\lambda^\sigma(x^\sigma) = \lambda(x)^\sigma.$$

Тогда $\sigma \to \lambda^{-1} \circ \lambda^{\sigma}$ есть 1 — коцикл на H со значением в $PGL(n, K)$, который определяет класс $\alpha \in H^1(H, PGL(n, K))$. Для кограничного отображения

$$\delta : H^1(H, PGL(n, K)) \to H^2(H, K^*) \subset \mathrm{Br}k$$

легко проверить, что $\delta(\alpha) = -\psi_2(\mathfrak{D})$. Остается напомнить, что $\delta(\alpha) \in \frac{1}{n} Z/Z$ [7] и (3) вместе с теоремой 1 доказано.

2. Соотношение между замкнутыми подгруппами конечного индекса в группе A_k и подгруппами норм (подгруппами норм в A_k называем подгруппы вида $N_{K/k}(A_K)$, где K/k сепарабельное расширение конечной степени).

Теорема 2. *Если $\mathfrak{A}$ — замкнутая подгруппа в A_k и $A_k/\mathfrak{A} \approx Z/nZ$, то существует сепарабельное расширение K/k степени n такое, что $N_{K/k}(A_k) \subset \mathfrak{A}$.*

Замечание 2. Это, по существу, было известно в характеристике нуль [3]. Новое — случай char $k \neq 0$.

Доказательство. Характеру порядка n на A_k, который соответствует мономорфизму

$$0 \to A_k/\mathfrak{A} \to R/Z,$$

соответствует в свою очередь класс главных однородных пространств над A порядка n с представителем V (используем двойственность Тэйта [6]). Сепарабельный показатель V равен его порядку по теореме 1, и поэтому (как видно из доказательства теоремы Лихтенбаума о совпадении показателя и сепарабельного показателя) существует сепарабельное расширение K/k степени n, над которым V имеет рациональную точку. По двойственности Тэйта [6] такой класс (с представителем V) соответствует характеру на A_k, обращающемуся в нуль на $N_{K/k}(A_k)$, т. е. $N_{K/k}(A_k) \subset \mathfrak{A}$, что и требовалось доказать.

Замечание 3. Известно, что для абелевых многообразий размерности 2 показатель главного однородного пространства может не совпадать с его порядком, поэтому аналог теоремы 2 не будет иметь места, если $\dim A \geqslant 2$ (подгрупп конечного индекса становится «слишком много») (см. [2], где рассмотрен случай нулевой характеристики).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Р. Шафаревич, Показатели эллиптических кривых, ДАН СССР, т. 114, № 4, 1957.
2. S. Lichtenbaum, Period-index problem for elliptic curves, Am. J. Math., t. 90, № 4, 1968.
3. П. А. Медведев, Порядок и показатель эллиптической кривой, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 5, 1966.
4. J. W. S. Cassels, Diophantine equations with special reference to elliptic curves, Journal London Math. Soc., t. 41, № 2, 1966.
5. J. W. S. Cassels, Arithmetic on curves of genus. 1. (V). Two counter-examples, Journal London Math. Soc., t. 38, № 2, 1963.
6. О. М. Введенський, Локальні поля класів еліптичних кривих, ДАН УРСР, сер. А, № 10, 1968.
7. P. Roquette, Splitting of algebras by function fields of one variable, Nagoya Math. Journ., t. 27, № 1, 1966.

Поступила 26.XII 1968 г.

Львовский государственный университет