

**Область значений производной  
на классе голоморфных однолистных функций**

*И. А. Александров, С. А. Копанев*

Пусть на классе  $S$  голоморфных однолистных в круге  $|z| < 1$  функций  $\omega = f'(z)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ , задан функционал

$$I(f) = \ln f'(z_0), \quad 0 < |z_0| = r < 1, \quad (1)$$

со значениями в комплексной плоскости  $I = X + iY$ .

Множество  $D(z_0)$  значений  $I(f)$ ,  $f \in S$ , не зависит от аргумента точки  $z_0$ , ограничено, замкнуто и связно. Оно симметрично относительно оси  $Y = 0$  и прямой  $X = \ln \frac{1}{1-r^2}$ , содержит начало координат. Для нахождения  $D(r)$  достаточно определить границу  $\partial D(r)$  этого множества.

В данной заметке на основе вариационно-параметрического метода приводится новое решение задачи о нахождении  $D(r)$  и впервые дается конечное описание  $\partial D(r)$ . Мы пользуемся терминологией и обозначениями статьи [1], содержащей весь необходимый исходный материал для излагаемого ниже решения.

Ранее исследованием задачи об определении  $D(r)$  занимались Град [2], П. П. Куфарев [3], Дженкинс [4] и др. Большое число работ посвящено нахождению мажорирующих областей для  $D(r)$ .

Сформулируем теорему, доказанную нами.

**Т е о р е м а.** Пусть  $r \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ . Тогда  $\partial D(r)$  представляет собой замкнутую кривую с уравнением

$$\begin{aligned} I = \ln \frac{1}{1-r^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{a(1-x_0)}{\cos \alpha} - (e^{i\alpha} - i) \operatorname{arctg} \frac{a(1-x_0)}{1-\sin \alpha} - \\ - (e^{i\alpha} + i) \operatorname{arctg} \frac{a(1-x_0)}{1+\sin \alpha} - e^{i\alpha} \ln \frac{1-ax_0}{1+ax_0} - \\ - \frac{1}{2} \ln \frac{(a-\cos \alpha)^2 - 1}{(a+\cos \alpha)^2 - 1} + i \ln \frac{a-\sin \alpha}{a+\sin \alpha} - \pi (\operatorname{sign} \cos \alpha - e^{i\alpha}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha$  — параметр,  $0 \leq \alpha < 2\pi$ ,

$$a = \sqrt{\frac{1-x_0 \sin^2 \alpha}{x_0(1-x_0)}}$$

и  $x_0$ ,  $0 < x_0 < 1$ , — наименьший положительный корень уравнения

$$(1-r^2)x^3 - (2-r^2)x^2 + \frac{1+r^2}{\sin^2 \alpha}x - \frac{r^2}{\sin^2 \alpha} = 0. \quad (3)$$

Пусть  $r \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ . Тогда  $\partial D(r)$  состоит из двух дуг кривой (2) при  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  и двух прямолинейных отрезков

$$C_0(r) \leq X \leq C_1(r), \quad Y = \pm \left( \pi + \ln \frac{r^2}{1-r^2} \right), \quad (4)$$

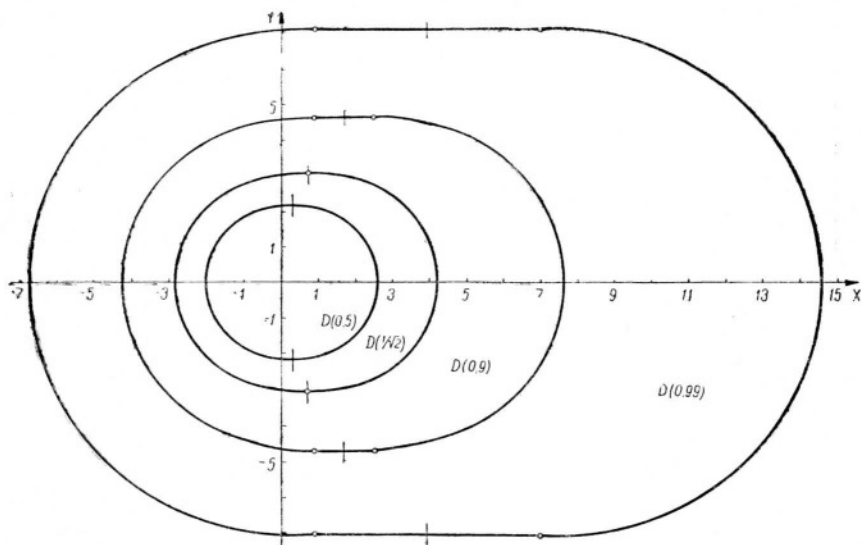


Рис. 1.

где

$$C_0(r) = -\ln(r^2 + \sqrt{2r^2 - 1}) + \arccos \frac{1-r^2}{r^2}, \quad (5)$$

$$C_1(r) = -\ln(r^2 - \sqrt{2r^2 - 1}) - \arccos \frac{1-r^2}{r^2}. \quad (6)$$

Отметим еще несколько свойств множеств  $D(r)$ . При  $r_1 > r_2$   $D(r_1) \supset D(r_2)$ . Рис. 1 на примере областей  $D(0,5)$ ,  $D(1/\sqrt{2})$ ,  $D(0,9)$ ,  $D(0,99)$  дает наглядное представление о виде  $D(r)$  и о зависимости семейства этих множеств от параметра  $r$ . Результаты численных расчетов, относящихся к случаям  $r = 0,5$ ,  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $r = 0,9$ ,  $r = 0,95$ ,  $r = 0,99$ , приведены в таблице. Соединение дуг и отрезков прямых, входящих в  $\partial D(r)$  при  $r \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ , гладкое.

Переходим к доказательству теоремы.

По основной теореме работы [1] все неособые граничные точки для функционала (1) содержатся в множестве

$$I(f) = 2 \int_0^f \frac{(y-q)(qy-2)}{(1-q^2)(1-qy)} dq, \quad (7)$$

$r$	0,5		$1/\sqrt{2}$		0,9		0,95		0,99	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	2,485	0,035	4,214	0,053	7,549	0,079	9,644	0,090	14,483	0,145
5	2,477	0,179	4,189	0,462	7,533	0,384	9,635	0,452	14,478	0,594
10	2,414	0,352	4,158	0,520	7,483	0,768	9,576	0,900	14,421	1,181
15	2,416	0,525	4,116	0,776	7,401	1,143	9,478	1,343	14,259	1,774
25	2,294	0,860	3,912	1,271	7,104	1,870	9,167	2,197	13,804	2,653
35	2,115	1,171	3,668	1,732	6,739	2,545	8,721	2,994	13,361	4,078
40	2,004	1,315	3,465	1,926	6,503	2,861	8,427	3,358	12,885	4,432
45	1,879	1,449	3,320	2,147	6,231	3,153	8,095	3,694	12,473	4,883
55	1,594	1,689	2,890	2,494	5,660	3,666	7,385	4,210	11,522	5,643
65	1,263	1,879	2,395	2,799	4,982	4,092	6,590	4,828	10,375	6,377
70	1,083	1,955	2,102	2,909	4,482	4,262	6,077	4,970	9,825	6,560
75	0,893	2,014	1,802	2,990	4,088	4,429	5,497	5,073	9,085	6,676
85	0,492	2,069	1,130	3,101	3,081	4,566	4,475	5,338	8,256	6,863
89,9	0,292	2,209	0,705	3,539	2,475	4,581	3,772	5,367	6,999	7,019

где  $y = y(\varrho, \alpha)$  — решение уравнения

$$\frac{e^{-i\alpha}(\varrho^2 - 1)y}{(\varrho y - 1)^2} + \frac{e^{i\alpha}}{y} = \frac{e^{i\alpha}(\varrho^2 - 1)y}{(\varrho - y)^2} + e^{-i\alpha}y, \quad (8)$$

имеющее модуль, равный единице.

Произведем в (7) и (8) следующие замены:

$$y = \frac{y_1 + i}{y_1 - i}, \quad (1 - \varrho)y_1 - \frac{1 + \varrho}{y_1} = 2y_2, \quad y_2 = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{1 - x}$$

и после несложных преобразований получим, что все неособые точки границы  $\partial D(r)$  принадлежат множеству

$$I(f) = \ln \frac{1}{1 - r^2} + 4 \int_0^r \frac{[\lambda + i(1 - x)] \sqrt{\lambda^2 + (1 - \varrho^2)(1 - x)^2}}{\lambda^2 + (1 - x)^2} \frac{d\varrho}{1 - \varrho^2}, \quad (9)$$

где  $x = x(\varrho, \alpha)$  — вещественный корень кубического уравнения

$$(1 - \varrho^2)x^3 - (2 - \varrho^2)x^2 + \sigma(1 + \varrho^2)x - \varrho^2\sigma = 0, \quad (10)$$

причем  $\lambda = \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\sigma = 1 + \lambda^2$ .

В (9) перейдем к новой переменной интегрирования по формуле

$$s = s(\varrho) = \frac{\varrho^2}{1 - \varrho^2}.$$

После этой замены формула (9) и уравнение (10) примут вид

$$I(f) = \ln \frac{1}{1 - r^2} + 2 \int_0^{s(r)} \frac{[\lambda + i(1 - x)] \sqrt{\lambda^2(1 + s) + (1 - x)^2}}{\lambda^2 + (1 - x)^2} \frac{ds}{(1 + s)\sqrt{s}} \quad (11)$$

и

$$x^3 - (2 + s)x^2 + \sigma(1 + 2s)x - \sigma s = 0 \quad (12)$$

соответственно.

Уравнение (12) в плоскости  $(s, x)$  определяет кривую третьего порядка, вид которой дан на рис. 2. По классификации Ньютона [5], это кривая

первого типа, первого рода (гиперболизм параболы) и четвертого класса (гиперболизм конических сечений).

При  $0 < s < s_0$  уравнение (12) имеет одно вещественное решение, при  $s > s_0$  — три вещественных решения.

Значит, при  $s(r) < s_0$  интегрирование в (11) должно быть выполнено по дуге  $\Gamma_1$ .

Если  $s(r) > s_0$ , то из трех имеющихся возможностей интегрирования, именно, по дуге  $\Gamma_1$  от 0 до  $s_0$ , а затем от  $s_0$  до  $s(r)$  или по дуге  $\Gamma_2$ , или по

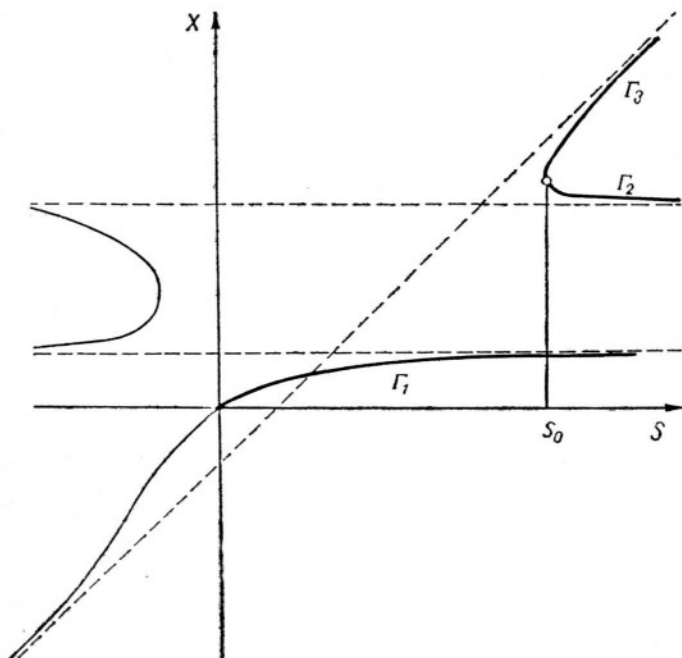


Рис. 2.

дуге  $\Gamma_2$ , или по дуге  $\Gamma_3$  (ср. с [1]) выбираем ту, при которой модуль подынтегрального выражения в (11)

$$\frac{1}{s+1} \sqrt{\frac{1}{2s} + \frac{1}{2x}}$$

имеет максимум. Отсюда следует, что и при  $s(r) > s_0$  интегрирование должно быть проведено по дуге  $\Gamma_1$ .

Считая в дальнейшем  $x$  независимой переменной, а  $s$  — функцией от  $x$ , задаваемой уравнением (12) вдоль  $\Gamma_1$ , сводим задачу о нахождении  $\partial D(r)$  к вычислению интегралов в выражении

$$I(f) = \ln \frac{1}{1-r^2} + 2 \int_0^{x_*} \frac{[\lambda + i(1-x)](x^4 - 4\sigma x^3 + 6\sigma x^2 - 4\sigma x + \sigma^2)}{(x^2 - \sigma)(x^2 - 2x + \sigma)(x^2 - 2\sigma x + \sigma)} \times \\ \times \sqrt{\frac{\sigma - x}{x(1-x)}} dx = \ln \frac{1}{1-r^2} - 2J_1 - 2\lambda J_2 - 4i\lambda^2 J_3,$$

где

$$J_1 = \int_0^{x_*} \left[ \frac{2\lambda}{x^2 - 2x + \sigma} - i \frac{1}{x} \right] \sqrt{\frac{x(1-x)(\sigma - x)}{x^2 - \sigma}} dx,$$

$$J_2 = \int_0^{x_0} \frac{1}{x^2 - 2\sigma x + \sigma} \sqrt{\frac{\sigma - x}{x(1-x)}} dx,$$

$$J_3 = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{x(1-x)(\sigma-x)}}{(x^2 - 2x + \sigma)(x^2 - 2\sigma x + \sigma)} dx$$

и  $x_0$  — наименьший положительный корень уравнения (3), который всегда удовлетворяет условию  $0 < x_0 < 1$ .

При  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  в выражении (11) возникают неопределенности.

Доопределим в нем подынтегральную функцию по непрерывности с использованием разложения

$$x(s, \lambda) = 1 + \sqrt{\frac{s+1}{s-1}} \lambda + \frac{s}{(s-1)^2} \lambda^2 + \dots$$

соответствующего корня уравнения (12) в окрестности точки  $\lambda = 0$  и затем выполним интегрирование\*.

Проведением указанных вычислений завершается доказательство теоремы.

Как следствия этой теоремы, можно легко получить известные оценки  $|f'(z)|$ ,  $\arg f'(z)$  [6] на классе  $S$  (для этого достаточно в теореме положить  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \pi$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ ), оценки линейных функционалов относительно  $|f'(z)|$  и  $\arg f'(z)$ , а также различные мажорантные области для множеств значений  $\ln f'(z)$  на классе  $S$ .

В заключение заметим, что ветвью  $\Gamma_1$  кривой (12) вполне определяется функция  $\mu(\tau)$ , входящая в уравнение Левнера как управляющий параметр. Интегрированием уравнения Левнера можно найти граничные функции в рассматриваемой задаче для каждой пары значений  $r$  и  $\alpha$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Александров, Граничные значения функционала  $J = J(f, \bar{f}, f', \bar{f}')$  на классе голоморфных, однолистных в круге функций, Сиб. матем. ж., т. 4, № 1, 1963.
2. A. G r a d, The region of values of the derivative of a schlicht function, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., XXXV, 1950, 263—291.
3. П. П. Куфарев, Об одном методе исследования экстремальных задач теории однолистных функций, ДАН СССР, т. 107, № 5, 1956.
4. Д. Ж. Дженкинс, Однолистные функции и конформные отображения, М., 1962.
5. А. С. Смогоржевский, Е. С. Столова, Справочник по теории плоских кривых 3-го порядка, Физматгиз, М., 1961.
6. Г. М. Голузин, О теоремах искажения в теории конформных отображений, Матем. сб., вып. 1, 1936.

Поступила 1.XII 1969 г.

Донецкий ВЦ АН УССР,

Томский институт автоматизации и электромеханики АН СССР

\* При подсчете интегралов  $J_1, J_2, J_3$  использовались подстановки

$$xv = \sqrt{x(1-x)(\sigma-x)},$$

$$(\sigma-x)v = \sqrt{\sigma x(1-x)(\sigma-x)}.$$

$$(1-x)v = \sqrt{x(1-x)(\sigma-x)}$$

соответственно.