УДК 534.111

К вопросу о применении метода усреднения для исследования нелинейных колебаний прямоугольных пластинок

П. А. Бондарев

За последнее время все чаще возникают проблемы, связанные с необходимостью учета нелинейных свойств элементов конструкций. Некоторые задачи изгибных колебаний прямоугольной пластинки сводятся к исследованию нелинейного дифференциального уравнения следующего типа:

$$\nabla^4 w + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varepsilon f(\varepsilon, x, y, w, w_x', w_y', \ldots, \nu t), \tag{1}$$

где ∇ — дифференциальный оператор;

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 dy^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

α — некоторая постоянная; ε — малый параметр; ν — частота возмущающей силы.

Правая часть уравнения (1) определяет возмущающие силы, среди которых $f(\varepsilon, x, y, w, w'_x, w'_y, \ldots, \nu t)$ — периодическая функция по νt, периода 2π, кроме того,

$$\varepsilon f(\varepsilon, x, y, w, w'_x, w'_y, \ldots, \nu t) = \varepsilon f_1(x, y, w, w'_x, w'_y, \ldots, \nu t) + \varepsilon^2 f_2(x, y, w, w'_x, w'_y, \ldots, \nu t) + \ldots \tag{2}$$

Нелинейные дифференциальные уравнения вида (1) могут быть решены с помощью метода усреднения, разработанного Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским.

Пусть нелинейные колебания свободно опертой прямоугольной пластинки описываются дифференциальным уравнением (1), требуется найти решение (1) при начальных и граничных условиях:

$$w|_{t=0} = f_1(x, y); \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x, y); \tag{3}$$

$$w|_{x=0} = 0; \qquad w|_{x=a} = 0; \qquad w|_{y=0} = 0; \qquad w|_{y=b} = 0.$$

Решение задачи (1) — (3) будем искать в виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) \sin\frac{\pi m x}{a} \sin\frac{\pi n y}{b}, \tag{4}$$

$T_{mn}(t)$—функция, подлежащая определению. Подставляя (4) в (1) и умножая обе части (1) на

$$\sin\frac{\pi i x}{a} \sin\frac{\pi i y}{b}\, dxdy$$

затем интегрируя в промежутке $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant b$ и учитывая ортогональность систем, получаем для определения $T_{mn}(t)$ счетную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 T_{ij}}{dt^2} + \omega_{ij}^2 T_{ij} = \varepsilon F(\varepsilon, T_{ij}, \dot{T}_{ij}, \nu t), \tag{5}$$

где

$$F(\varepsilon, T_{ij}, \dot{T}_{ij}, \nu t) = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(\varepsilon, x, y, w, w'_x, w'_y, \ldots, \nu t) \sin\frac{\pi i x}{a} \sin\frac{\pi j y}{b}\, dxdy,$$

$$\omega_{ij}^2 = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{\pi i}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{b}\right)^2\right]^2 \quad (i, j = 1, 2 \ldots). \tag{6}$$

Начальные условия для функций T_{ij} принимают вид:

$$T_{ij}|_{t=0} = \Phi_{ij}; \qquad \left.\frac{dT_{ij}}{dt}\right|_{t=0} = \Psi_{ij},$$

где

$$\Phi_{ij} = 4\int_0^a\int_0^b f_1(x, y) \sin\frac{\pi i x}{a} \sin\frac{\pi j y}{b}\, dxdy, \tag{7}$$

$$\Psi_{ij} = 4\int_0^a\int_0^b f_2(x, y) \sin\frac{\pi j x}{a} \sin\frac{\pi i y}{b}\, dxdy.$$

Таким образом, задача (1) — (3) сведена к задаче, решаемой методом усреднения [1, 2]. Приведем систему (5) к стандартной форме. Для этого введем медленно изменяющиеся комплексно-сопряженные функции U_{mn} с помощью формул:

$$T_{mn} = U_{mn} e^{i\omega_{mn} t} + U^*_{mn} e^{-i\omega_{mn} t},$$

$$\dot{T}_{mn} = i\omega_{mn} U_{mn} e^{i\omega_{mn} t} - i\omega_{mn} U^*_{mn} e^{-i\omega_{mn} t} \quad (m, n = 1,2 \ldots). \tag{8}$$

Подставив (8) в (5), получим счетную систему дифференциальных уравнений в стандартной форме:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{mn} &= \frac{\varepsilon e^{-i\omega_{mn} t}}{2i\omega_{mn}} [F_{mn} (U_{mn} \ U^*_{mn}, \ \nu t)], \\ \dot{U}^*_{mn} &= -\frac{\varepsilon e^{+i\omega_{mn} t}}{2i\omega_{mn}} [F_{mn} (U_{mn}, U^*_{mn}, \nu t)]. \end{aligned} \tag{9}$$

Начальные условия преобразуются к следующему виду:

$$U_{mn}|_{t=0} = \frac{\Phi_{mn}}{2} + \frac{\Psi_{mn}}{2i\omega_{mn}}; \qquad U^*_{mn}|_{t=0} = \frac{\Phi_{mn}}{2} - \frac{\Psi_{mn}}{2i\omega_{mn}} \quad (m, n = 1,2 \ldots). \tag{10}$$

Применив к системе (9) метод усреднения, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{mn}}{dt} &= \varepsilon \underset{t}{M} \left[\frac{e^{-i\omega_{mn} t}}{2i\omega_{mn}} F(U_{mn}, U^*_{mn}, \nu t) \right], \\ \frac{d\xi^*_{mn}}{dt} &= -\varepsilon \underset{t}{M} \left[\frac{e^{+i\omega_{mn} t}}{2i\omega_{mn}} \ F(U_{mn}, \ U^*_{mn}, \nu t) \right], \end{aligned} \tag{11}$$

где $\underset{t}{M}$ — оператор усреднения.

В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение нелинейных колебаний прямоугольной пластинки такого вида:

$$\nabla^4 w + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \varepsilon w^3, \tag{12}$$

где α — некоторая постоянная, ε — малый параметр, ∇ — дифференциальный оператор.

Решение (12) при начальных и граничных условиях (3) будем искать в виде (4). После подстановки (4) в (11), умножения на

$$\sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi j y}{b} dx dy$$

и интегрирования в промежутке $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, учитывая ортогональность, получаем следующую систему:

$$\frac{d^2 T_{ij}}{dt^2} + \omega^2_{ij} T_{ij} = 4\varepsilon \left[\frac{9}{16} T^3_{ij} + \frac{3}{2} T_{ij} \sum_m \sum_n T^2_{mn} \right]; \tag{13}$$

с помощью замены переменных (8) преобразуем ее к стандартной форме

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ij} = \frac{\varepsilon e^{-i\omega_{ij} t}}{\omega_{ij}} \Bigg[& \frac{9}{16} (U_{ij} e^{i\omega_{ij} t} + U^*_{ij} e^{-i\omega_{ij} t})^3 + \\ & + \frac{3}{2} (U_{ij} e^{i\omega_{ij} t} + U^*_{ij} e^{-i\omega_{ij} t}) \sum_m \sum_n (U_{mn} e^{i\omega_{mn} t} + U^*_{mn} e^{-i\omega_{mn} t})^2, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\dot{U}^*_{ij} = -\frac{\varepsilon e^{i\omega_{ij}t}}{\omega_{ij}}\left[\frac{9}{16}(U_{ij}e^{i\omega_{ij}t} + U^*_{ij}e^{-i\omega_{ij}t})^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}(U_{ij}e^{i\omega_{ij}t} + U^*_{ij}e^{-i\omega_{ij}t}) \sum_m \sum_n (U_{mn}e^{i\omega_{mn}t} + U^*_{mn}e^{-i\omega_{mn}t})^2.\right.$$

Усредняя правые части (14) по явно входящему времени, получим

$$\frac{d\xi_{ij}}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega_{ij}}\xi_{ij}\left[\frac{27}{16}\xi_{ij}\xi^*_{ij} + \frac{3}{2}\sum_m\sum_n \xi_{mn}\xi^*_{mn}\right],$$

$$\frac{d\xi^*_{ij}}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_{ij}}\xi^*_{ij}\left[\frac{27}{16}\xi_{ij}\xi^*_{ij} + \frac{3}{2}\sum_m\sum_n \xi_{mn}\xi^*_{mn}\right] \tag{15}$$

$$(i,\ j = 1, 2. \ldots;\ m,\ n = 1, 2, \ldots).$$

Начальные условия будут иметь вид:

$$\xi_{ij}|_{t=0} = \frac{\Phi_{ij}}{2} + \frac{\Psi_{ij}}{2i\omega_{ij}},$$

$$\xi^*_{ij}|_{t=0} = \frac{\Phi_{ij}}{2} - \frac{\Psi_{ij}}{2i\omega_{ij}}. \tag{16}$$

Решая систему (15), находим

$$\xi_{ij}\xi^*_{ij} = C, \tag{17}$$

где C — произвольная постоянная. Учитывая (15) — (17), получаем:

$$\xi_{ij} = C_1 e^{\frac{\varepsilon}{\omega_{ij}}A_{ij}t}; \qquad \xi^*_{ij} = C_2 e^{-\frac{\varepsilon}{\omega_{ij}}A_{ij}t}, \tag{18}$$

где

$$A_{ij} = \left[\frac{27}{16}\left(\frac{\Phi^2_{ij}}{4} + \frac{\Psi^2_{ij}}{4\omega^2_{ij}}\right) + \frac{3}{2}\sum_m\sum_n\left(\frac{\Phi^2_{mn}}{4} + \frac{\Psi^2_{mn}}{4\omega^2_{mn}}\right)\right].$$

После определения произвольных постоянных C_1, C_2 с помощью (8) найдем T_{ij}

$$T_{ij} = \Phi_{ij}\cos\left(\omega_{ij}t + \frac{\varepsilon}{\omega_{ij}}A_{ij}t\right) + \frac{\Psi_{ij}}{\omega_{ij}}\sin\left(\omega_{ij}t + \frac{\varepsilon}{\omega_{ij}}A_{ij}t\right). \tag{19}$$

Тогда решение (12) будет иметь следующий вид:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\Phi_{mn}\cos\left(\omega_{mn}t + \frac{\varepsilon}{\omega_{mn}}A_{mn}t\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Psi_{mn}}{\omega_{mn}}\sin\left(\omega_{mn}t + \frac{\varepsilon}{\omega_{mn}}A_{mn}t\right)\right]\sin\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}. \tag{20}$$

В случае $\varepsilon = 0$ получаем из (20) решение линейной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
2. Ю. А. Митропольский, Лекции по методу усреднения в линейной механике, «Наукова думка», К., 1966.

3. М. М. Бабаков, Теория колебаний, «Наука», М., 1968.
4. С. Н. Тимошенко, Колебания в инженерном деле, Физматгиз, М., 1967.
5. С. А. Василишин, Применение метода усреднения к решению смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений, УМЖ, т. 18, № 2, 1966.

Поступила 28.II 1970 г.
Черниговское высшее военное авиационное училище летчиков