УДК 519.45

Описание полугрупп, относительно свободных в многообразиях нильпотентных полугрупп

М. С. Трепетин

Основные понятия, используемые в заметке, приведены в монографиях [1—4]. Часть из этих терминов, определяющих рассматриваемый круг вопросов, читатель найдет в п. 1—4. Ниже рассмотрен класс $\mathfrak{A}$ коммутативных k-нильпотентных полугрупп, свободных в многообразиях $\mathfrak{E}$ нильпотентных полугрупп. Заметим, что класс всех нильпотентных полугрупп образует категорию в смысле [4, стр. 50], даже резидуальную категорию, так как замкнут относительно прямых произведений [4, стр. 63]. П. Кон [4, стр. 191] приводит необходимые и достаточные условия для того, чтобы Ω-алгебра была свободна в некотором многообразии $\mathfrak{D}$. Мы используем с некоторыми изменениями цитируемую теорему Кона для определения (п. 2) относительно свободных полугрупп, естественным образом возникающих при изучении полугрупп эндоморфизмов полугрупп. В заметке конкретно указывается вид тождеств, которыми описываются все полугруппы класса $\mathfrak{A}$ относительно свободные в категории $\mathfrak{E}_k$ всех нильпотентных коммутативных полугрупп, показатель нильпотентности которых не превосходит натурального числа k.

1. Следуя [1, стр. 492], назовем полугруппу A свободной в некотором классе Г полугрупп, если она обладает порождающим множеством, всякое отображение которого в любую полугруппу $B \in \Gamma$ может быть продолжено до гомоморфизма A в B.

2. Следуя [2, стр. 469], назовем полугруппу A свободной в себе (или относительно свободной в терминологии универсальных алгебр [4, стр. 191]) над некоторым множеством M, если M — ее порождающее множество, всякое отображение которого в A может быть продолжено до эндоморфизма всей полугруппы.

3. Полугруппа A k-нильпотентна, если все ее элементы удовлетворяют тождеству: α) $\xi_1 \ldots \xi_l = \eta_1 \ldots \eta_l$ в том и только в том случае, когда $l=k$. Число k назовем показателем нильпотентности полугруппы A.

4. Теорема. *Коммутативная k-нильпотентная полугруппа A свободна в себе тогда и только тогда, когда она свободна в многообразии полугрупп, элементы которых, кроме тождества коммутативности:* β) $\xi+\eta = \eta+\xi$ *и нильпотентности:* α) $\xi_1 + \ldots + \xi_k = \eta_1 + \ldots + \eta_k =$ *(записанном аддитивно ввиду абевости), удовлетворяют возможно тождествам вида:*

$$\gamma)\ \sum_1^m i_r \xi_r = \sum_1^k \eta_r \ (1 \leqslant m < \Sigma i_r < k);$$

$$\delta)\ \sum_1^n i_r \xi_r = \sum_1^n j_r \xi_r \ (1<n<k,\ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n < k,$$ *по крайней мере, для двух индексов s и t должно быть* $i_s < j_s$, $i_t > j_t$), *и никаких других определяющих соотношений между элементами полугруппы A — кроме следствий из указанных тождеств — нет.*

Доказательство. В одну сторону доказательство теоремы очевидно. Покажем, что если A — коммутативная k-нильпотентная полугруппа, свободная в себе над множеством $A \setminus 2A$, то в полугруппе A кроме тождеств α), β) возможно выполнение только тождеств вида γ) или δ), следствий из этих тождеств и никаких определяющих соотношений, кроме следствий из упомянутых тождеств, нет.

Отметим некоторые очевидные свойства полугруппы $A \neq 0$:

1) $k \geqslant 2$;

2) $A_0 = A \setminus 2A \neq \varnothing$ — неприводимое порождающее множество полугруппы A;

3) всякий элемент $\tau \in A$, $\tau \neq 0$, представляется в виде:

$$\tau = \sum_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha(\tau)\, x_\alpha, \tag{1}$$

где $i_\alpha(\tau) \in \{0, 1, \ldots, k-1\} = N$; $x_\alpha \in A_0$; Λ — некоторое индексное множество, равномощное множеству A_0;

4) если $\tau \neq 0$, то последовательность $\{i_\alpha(\tau)\}_{\alpha \in \Lambda}$ содержит лишь конечное число $l < k$ членов, отличных от нуля, причем $\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha(\tau) < k$;

5) представление $\tau \neq 0$ в виде (1) в случае отсутствия в полугруппе A тождеств вида δ) единственно.

Заметим, далее, что выполнение тождеств α), β) следует из определения полугруппы A. Пусть $a, b \in A$, $a \neq 0$, $a = \sum\limits_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha x_\alpha$, $b = \sum\limits_{\alpha \in \Lambda} j_\alpha x_\alpha$ и $a = b$ — определяющее соотношение в A, не являющееся тождеством. Последнее означает, что найдется последовательность $\{a_\alpha \in A \mid \alpha \in \Lambda\}$, что $\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha a_\alpha \neq \sum\limits_{\alpha \in \Lambda} j_\alpha a_\alpha$. Но тогда отображение $f : A_0 \to A$ такое, что $x_\alpha f = a_\alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda$ не является эндоморфизмом вопреки тому, что A свободна в себе. Следовательно, определяющих соотношений, не являющихся тождествами в полугруппе A, нет. Предположим, что в полугруппе A выполняется тождество:

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha \xi_\alpha = \sum_{\alpha \in \Lambda} j_\alpha \xi_\alpha, \tag{2}$$

причем $\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha = l$, $\sum\limits_{\alpha \in \Lambda} j_\alpha = r$. Для определенности считаем, что $l < r$. Выбросив слева и справа равенства (2) все i_α, j_α, равные нулю, получим

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{D}} i_{\alpha\beta} \xi_\beta = \sum_{\beta' \in \mathfrak{D}'} j_{\alpha\beta'} \xi_{\beta'}. \tag{3}$$

Возможны два случая: $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'$ и $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{D}'$. Во втором случае предположим, что $i_{\alpha\beta} = 1$, $\beta \in \mathfrak{D}$. Тогда полугруппа A оказывается l-нильпотентной, вопреки тому, что она k-нильпотентна. Следовательно, $i_{\alpha\beta} > 1$ хотя бы для одного $\beta \in \mathfrak{D}$. Далее, каков бы ни был набор $\{a_\beta \in A \mid \beta \in \mathfrak{D}\}$, в множестве $\mathfrak{D}' / (\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}')$ можно выбрать ε такое, что, полагая $\xi_\varepsilon = 0$, получим $\sum\limits_{\beta \in \mathfrak{D}} i_{\alpha\beta} a_\beta = 0$, т. е. в полугруппе A имеется тождество вида:

$$\sum_1^m i_\alpha \xi_\alpha = \sum_1^k \eta_\alpha, \quad 1 \leqslant m = |\mathfrak{D}| < k.$$

Пусть теперь $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'$. Предположив, что для $\forall_{\beta \in \mathfrak{D}}\, i_{\alpha\beta} = 1$, получаем $i_{\alpha\beta} = j_{\alpha\beta} = 1$, т. е. $v = v$. В противном случае A l-нильпотентна. Будем считать, далее, что $i_{\alpha\beta} > 1$ хотя бы для одного β, тогда $j_{\alpha\beta'} > 1$ при некотором $\beta' \in \mathfrak{D}$. Предположив, что $i_{\alpha\beta} < j_{\alpha\beta}$ при всех $\beta \in \mathfrak{D}$, приходим к тождеству γ). Если же существует пара ε и $\varkappa \in \mathfrak{D}$ такая, что $i_\varepsilon < j_\varepsilon$, $i_\varkappa > j_\varkappa$, то приходим к тождеству δ), отмеченному в условии теоремы.

Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. С. Ляпин, Полугруппы, Физматгиз, М., 1960.
2. А. Г. Курош, Теория групп, «Наука», М., 1967.
3. А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, Физматгиз, М., 1962.
4. П. Кон, Универсальная алгебра, «Мир», М., 1968.

Поступила 15.I 1969 г.
Харьковский институт радиоэлектроники