УДК 519.21

Об устойчивости тривиального решения линейных стохастических систем

Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский

Многие задачи теории автоматического регулирования, радиофизики и т. д. сводятся к анализу устойчивости в том или ином смысле решения систем стохастических уравнений.

Одним из наиболее распространенных критериев устойчивости является устойчивость в среднем квадратичном. Для линейных систем стохастических дифференциальных уравнений имеется достаточно общая методика исследования устойчивости в этом смысле [1]. Однако эта методика не применима для стохастических дифференциально-разностных уравнений. Некоторые результаты исследования устойчивости тривиального решения уравнений такого типа в скалярном случае можно найти в работе [2]. В настоящей работе предлагаются критерии устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения систем линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений.

Рассмотрим систему уравнений

$$I\frac{d^N x(t)}{dt^N}+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}A_{jk}\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}=\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}\frac{d\Xi_{jk}(t)}{dt}\,\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}, \qquad (1)$$

где I — единичная матрица, $x\in R^n$, $\Xi_{jk}(t)$ — матрица, составленная из независимых в совокупности процессов броуновского движения $\xi_{pg}^{(jk)}$ с нулевым сносом и матрицей параметров диффузии S_{jk}. Обозначим $h(t)$ матричное решение системы

$$\frac{d^N y(t)}{dt^N}+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}A_{jk}\frac{d^j(t-\Delta_k)}{dt^j}=0 \qquad (2)$$

такое, что $h(t)\equiv 0$ при $t<0$, $h(0)=h'(0)=\ldots=h^{(N-2)}(0)=0$ и $h^{(N-1)}(0)=I$. Тогда, используя результаты [3], можно перейти от (1) к системе

$$\frac{d^l x(t)}{dt^l}=\frac{d^l y(t)}{dt^l}+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}\int_0^t h^{(l)}(t-\tau)d\Xi_{jk}(\tau)\,x^{(j)}(\tau-\Delta_k), \qquad (3)$$

где $y(t)$ — решение (2), $l=0,1,\ldots,N-1$.

Теорема. *Пусть корни квазиполинома*

$$\det W(z)=\det\left[Iz^N+\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}A_{jk}z^j e^{-\Delta_k z}\right] \qquad (4)$$

имеют отрицательные вещественные части. Если собственные значения матрицы

$$B=\frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{m}S_{jk}\int_0^\infty |(is)^j|^2[W^{-1}(is)]_+^{[2]}ds \qquad (5)$$

по модулю не превосходят единицы, то тривиальное решение системы (1) *асимптотически устойчиво в среднем квадратичном. Если хотя бы одно собственное значение матрицы B по модулю больше единицы, то модуль* *второго момента решения* (1), *построенного не по нулевой начальной функции, неограниченно возрастает при* $t \to \infty$.

В формулировке теоремы и везде в дальнейшем $+$ в качестве нижнего индекса означает, что элементы матрицы либо вектора взяты по модулю, а [2] в качестве верхнего индекса означает, что элементы матрицы либо вектора возведены в квадрат.

Доказательство. Используя независимость элементов матриц $\Xi_{jk}(t)$ и свойства интеграла по процессу броуновского движения [4] после возведения построчно обеих частей (3) в квадрат и применения операции математического ожидания получим систему уравнений N n-го порядка

$$\mu_l(t) = y^{(l)[2]}(t) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{m} h^{(l)[2]}(t-\tau) S_{jk}\mu_j(\tau - \Delta_k)\, d\tau \quad (\mu_l \in R^n,$$
$$l = 0, 1, \ldots, N-1), \tag{6}$$

где

$$\mu_l(t) = E\left\{\left[\frac{d^l x(t)}{dt^l}\right]^{[2]}\right\}.$$

Применим к обеим частям (6) преобразование Лапласа L. Получим

$$M_l(z) = Y_l(z) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{m} H_l(z)\, S_{jk} e^{-\Delta_k z} M_j(z), \tag{7}$$

где

$$M_l(z) = L\{\mu_l(t)\},\ \ Y_l(z) = L\{y^{(l)[2]}(t)\},\ \ H_l(z) = L\{h^{(l)[2]}(t)\}.$$

Если выполнено первое условие теоремы, то любое решение (2) по модулю стремится к нулю при $t \to \infty$ не медленнее e^{ct} с отрицательным показателем [3]. Тогда $Y_l(z)$ не имеет особенностей в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$ [5]. Следовательно, особенности вектора $M_l(z)$ совпадают с нулями определителя $F(z)$ системы (7). После несложных преобразований можно получить выражение для этого определителя

$$F(z) = \det[I - D(z)],$$

где

$$D(z) = H_0(z) \left(\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{m} S_{jk} H_j(z)\, e^{-\Delta_k z} \right) H_0^{-1}(z). \tag{8}$$

Матрица $D_+(z)$ имеет положительное собственное значение, не меньшее по модулю всех других собственных значений [6]. Обозначим его $\gamma(z)$. В [6] показано, что все собственные значения $D(z)$ не превосходят по модулю $\gamma(z)$. Легко видеть, что

$$\max_{\mathrm{Re}\, z = c} \gamma(z) = \gamma(c).$$

Первую часть теоремы докажем от противного. Пусть $F(z_0) = 0$ и $\mathrm{Re}\, z_0 > 0$.

Тогда $D(z_0)$ имеет собственное значение 1 и $\gamma(\mathrm{Re}\, z_0) \geqslant 1$. $\gamma(\mathrm{Re}\, z)$ не возрастает при возрастании $\mathrm{Re}\, z$, так как элементы матрицы $D_+(\mathrm{Re}\, z)$ не возрастают [6]. Отсюда $\gamma(0) \geqslant 1$. Используя выражение

$$h^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, z = 0} z^j e^{zt} W^{-1}(z)\, dz,$$

легко подсчитать

$$H_j(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |(is)^j|^2 [W^{-1}(is)]_+^{[2]}\, ds,$$

и поэтому матрица $D(0)$ подобна матрице B. Следовательно, матрица B имеет собственным значением $\gamma(0) \geqslant 1$, что противоречит условию первой части теоремы.

Пусть теперь хотя бы одно собственное значение матрицы B по модулю больше единицы. Тогда $\gamma(0) > 1$. Но при действительных s $\lim\limits_{s\to\infty} \gamma(s) = 0$ и $\gamma(s)$ — непрерывная функция s [6].

Следовательно, имеется $s_0 > 0$ такое, что $\gamma(s_0) = 1$, т. е. $F(s_0) = 0$. Тогда $|\mu_l(t)|$ растет при $t \to \infty$ не медленнее $e^{s_0 t}$ [5], что и требовалось доказать.

Замечание. Рассмотрим систему уравнений более общего вида

$$x_i^{(n_i)}(t) + \sum_{l=1}^{Q} \sum_{j=0}^{n_i-1} \sum_{r=0}^{R} a_{ljri} x_l^{(j)}(t-\Delta_r) = \sum_{l=1}^{Q} \sum_{j=0}^{n_i-1} \sum_{r=0}^{R} x_l^{(j)}(t-\Delta_r) \frac{d\xi_{ljri}}{dt}, \qquad (9)$$

где $x_i \in R^1$, $\xi_{ljri}(t)$ — независимые в совокупности процессы броуновского движения с нулевым сносом и параметрами диффузии σ_{ljri}, $i = 1, 2, \ldots, Q$.

Пусть N — наивысший порядок производной в системе (9). Тогда можно записать (9) в виде (1), но вместо матрицы I при $\frac{d^N x(t)}{dt^N}$ будет стоять некоторая, вообще говоря, вырожденная матрица A.

Если обозначить

$$W(z) = Az^N + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{m} A_{jk} z^j e^{-\Delta_k z},$$

где

$$A_{jk} = \{a_{ljri}\}_{l,\, i=1,2,\ldots,Q},$$

то можно использовать результаты доказанной выше теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения, «Наукова думка», К., 1968.
2. В. Н. Хижняк, Е. Ф. Царьков, Статистический запас устойчивости линейных стационарных систем, Вопросы динамики и прочности, вып. 19, «Зинатне», Рига, 1969.
3. Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально-разностные уравнения, «Мир», М., 1967.
4. Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1961.
5. Г. Дёч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Физматгиз, М., 1958.
6. Ф. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», М., 1967.

Поступила 28.VIII 1969 г.

Черновицкий государственный университет