УДК 517.947.5.37

О самосопряженности полуограниченных абстрактных дифференциальных операторов

Л. И. Вайнерман, М. Л. Горбачук

Рассмотрим минимальный симметрический оператор L_0, порожденный операторно-дифференциальным выражением $l[y] = -y'' + Ay + q(t)y$ в пространстве $L_2(H, (-\infty, \infty))$, где $q(t)$ и A — самосопряженные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H, причем $q(t)$ — ограниченный при каждом t, A — полуограниченный снизу. В работе доказано, что если оператор L_0 полуограничен снизу, то он самосопряженный.

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot\,\cdot\,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через $L_2(H, (a, b))$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ множество всех вектор-функций $u(t)$ $(t \in [a, b])$ со значениями в H таких, что $\int\limits_a^b \|u(t)\|^2 dt < \infty$. Как известно, $L_2(H, (a, b))$ — полное гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_a^b (u(t), v(t))\,dt \qquad (u, v \in L_2(H, (a, b))).$$

Рассмотрим выражение

$$l[u] = -u'' + Au + q(t)u, \tag{1}$$

где A — самосопряженный, полуограниченный снизу оператор в H, а $q(t)$ при каждом фиксированном $t \in (a, b)$ — ограниченный самосопряженный оператор, норма которого $\|q(t)\|$ как функция от t ограничена на каждом ограниченном промежутке Δ интервала (a, b) постоянной, которая, вообще говоря, зависит от Δ. Кроме того, предполагается, что операторная функция $q(t)$ слабо измерима.

Замыкание в пространстве $L_2(H, (a, b))$ симметрического оператора L_0', заданного на финитных вектор-функциях $u(t)$, удовлетворяющих условиям: а) $u(t)$ — дважды сильно непрерывно дифференцируема в H; б) при $t \in [a, b]$ $u(t) \in D(A)$ ($D(A)$ — область определения оператора A); в) $l[u] \in L_2(H, (a, b))$, обозначим L_0 и назовем минимальным оператором, порожденным выражением (1). Сопряженный к нему оператор L_0^* назовем максимальным.

2. На множестве $H_+ = D(A)$ введем скалярное произведение

$$(f, g)_+ = (Af, Ag) \qquad (f, g \in D(A)).$$

Относительно $(\cdot\,\cdot\,\cdot)_+$ H_+ — полное гильбертово пространство, причем $\|\cdot\|_+ \geqslant \|\cdot\|$, т. е. H_+ можно рассматривать как пространство с позитивной нормой по отношению к H [1]. Через H_- обозначим пространство с негативной нормой, построенное по H_+ и $H_0 = H$. Таким образом, имеем $H_+ \subseteq H_0 \subseteq H_-$.

Оператор A можно рассматривать теперь как оператор, действующий непрерывно из H_+ в H. Сопряженный к нему оператор, действующий непрерывно из H в H_-, обозначим $\widetilde{A}$. Нетрудно видеть, что $\widetilde{A}$ является расширением оператора A, если последний рассматривать в H_-. Наряду с выражением (1) имеем дело также с выражением

$$\widetilde{l}\,[u] = -u'' + \widetilde{A}u + q(t)\,u. \tag{2}$$

Если $-\infty < a < b < \infty$, то можно показать, что имеют место следующие утверждения относительно областей определения минимального и максимального операторов, порожденных выражением (1).

1°. *Вектор-функция* $u(t) \in L_2(H, (a, b))$ *принадлежит* $D(\overset{*}{L_0})$ *тогда и только тогда, когда* $u'(t)$ *существует в* H_-, *является абсолютно непрерывной на* $[a, b]$ *в* H_- *и* $\widetilde{l}\,[u] \in L_2(H, (a, b))$, *при этом* $\overset{*}{L_0}u = \widetilde{l}\,[u]$.

2°. *Если* $u(t) \in D(\overset{*}{L_0})$, *то она непрерывно дифференцируема в* H *внутри интервала* (a, b).

3°. *Если* $u(t) \in D(\overset{*}{L_0})$, $\chi(t)$ — *скалярная дважды непрерывно дифференцируемая и финитная на интервале* (a, b) *функция, то* $\chi(t)\,u(t) \in D(L_0)$.

3. Пусть теперь $a = -\infty$, $b = \infty$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если оператор* L_0 *полуограничен снизу, то он самосопряжен.*

Доказательство*. Не умаляя общности, можно считать, что для любой $u(t) \in D(L_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{l}\,[u](t), u(t))\,dt \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \| u(t) \|^2\,dt. \tag{3}$$

Обозначим через $\chi(t)$ достаточно гладкую финитную функцию, удовлетворяющую условиям:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \dfrac{1}{2}, \\ 0, & |t| > \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Достаточно доказать, что при условии (3) не существует отличной от нуля функции $v(t) \in L_2(H, (-\infty, \infty))$, которая удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (l\,[u], v)\,dt = 0 \tag{4}$$

для всех $u(t) \in D(L_0')$.

Допустим, что такая функция $v(t)$ существует. Из (4) имеем, что $v(t) \in D(\overset{*}{L}_{0,n})$, где $L_{0,n}$ и $\overset{*}{L}_{0,n}$ — минимальный и максимальный операторы, порожденные выражением (1) в $L_2(H, (-n, n))$. В силу 3° вектор-функция $v_n(t) = \chi_n(t)\,v(t) \in D(L_{0,n})$, где $\chi_n(t) = \chi\left(\dfrac{t}{n}\right)$, а отсюда нетрудно заключить, что $v_n(t) \in D(L_0)$, так что для $v_n(t)$ справедливо неравенство (3):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^2 \| v \|^2 dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} (\widetilde{l}\,[v_n], v_n)\,dt.$$

---

* Метод доказательства позаимствован из [2], где устанавливается аналогичная теорема для уравнения Шредингера.

Так как $\widetilde{l}\,[v_n]=\widetilde{l}\,[v]\,\chi_n-2v'\chi_n'-v\chi_n''=-2v'\chi_n'-v\chi_n''$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\chi_n^2\,\|v\|^2dt\leqslant-\int_{-\infty}^{\infty}(2v'\chi_n'+v\chi_n'',v\chi_n)\,dt. \tag{5}$$

Из неравенства (5) имеем соотношение $\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}(v'\chi_n',v\chi_n)\,dt=0$, которое приводит к тождеству:

$$2\int_{-\infty}^{\infty}(v'\chi_n',v\chi_n)\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\chi_n^2)'\,(\|v\|^2)'dt=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\|v\|^2\,(\chi_n^2)''\,dt=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\|v\|^2\,(\chi_n\chi_n''+(\chi_n')^2)\,dt.$$

Теперь неравенство (5) принимает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\chi_n^2(t)\,\|v\|^2\,dt\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}(\chi_n'(t))^2\,\|v\|^2\,dt,$$

т. е.

$$\int_{-\frac{1}{2}n}^{\frac{1}{2}n}\|v\|^2dt<\frac{c}{n^2}\int_{-n}^{n}\|v\|^2dt.$$

Устремляя $n\to\infty$ и учитывая, что $v\in L_2(H,(-\infty,\infty))$, получаем, что $v(t)\equiv0$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает условие самосопряженности оператора L_0, полученное М. М. Гехтманом в [3], а именно, имеет место следующее следствие.

Следствие 1. *Если $q\,(t)$ при каждом фиксированном $t\in(-\infty,\infty)$ (— положительный оператор, то оператор L_0 самосопряжен в $L_2\,(H, (-\infty,\ \infty))$.*

Следствие 2. *Если*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|q\,(t)\|\,dt<\infty, \tag{6}$$

то L_0 самосопряжен в $L_2\,(H,\ (-\infty,\ \infty))$.

Это утверждение вытекает из того, что минимальный оператор, порожденный выражением $l_1\,[u]=-u''+q\,(t)\,u$, полуограничен снизу [4], а потому и подавно полуограничен снизу оператор L_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
2. И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, Физматгиз, М., 1963.
3. М. М. Гехтман, О самосопряженности абстрактных дифференциальных операторов, Матем. заметки, т. 6, вып. 1, 1969.
4. Ф. С. Рофе-Бекетов, О разложении по собственным функциям систем с суммируемым потенциалом, ДАН СССР, т. 156, № 5, 1964.

Поступила 29.XII 1969 г.
Киевское высшее инженерное авиационное училище,
Институт математики АН УССР