УДК 517.919

К методу малого параметра

В. Н. Лаптинский

В работе рассматриваются линейные и квазилинейные уравнения второго порядка, содержащие малый параметр. Предлагается способ построения формальных решений указанных уравнений. Он опирается на экспоненциальную интерпретацию колебаний как в линейных, так и нелинейных системах, что вполне согласуется с известными результатами [1—3]. Следует отметить, что экспоненциальные преобразования линейных систем с медленно изменяющимися коэффициентами широко использовались многими авторами (см., например, [4]).

1. Линейные колебания. Вначале рассмотрим линейный случай, для чего будем исследовать уравнение вида

$$x'' + p_1(t) x' + p_2(t) x = 0. \tag{1.1}$$

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$x = \exp \int_0^t \lambda_1(\tau)\, d\tau,$$

где $\lambda_1(t)$ — новая неизвестная функция. Тогда получим

$$\lambda_1' + \lambda_1^2 + p_1(t)\lambda_1 + p_2(t) = 0. \tag{1.2}$$

От уравнения (1.2) переходим к системе вида

$$\begin{aligned} &\lambda_1+\lambda_2=-p_1(t), \\ &\lambda_1\lambda_2-\lambda_1'=p_2(t), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\lambda_2(t)$ — вспомогательная неизвестная функция.

Отметим, что система (1.3) является в некотором смысле естественной для линейного уравнения (1.1). Предполагаем, что все решения (1.3) бесконечно продолжимы вправо, т. е. при $t \geqslant 0$.

Тогда общее решение уравнения (1.1) примет вид

$$x=c_1\exp\int_0^t\lambda_1 d\tau+c_2\left(\exp\int_0^t\lambda_1 d\tau\right)\int_0^t\exp\left[\int_0^\tau(\lambda_2-\lambda_1)\,d\sigma\right]d\tau. \tag{1.4}$$

Чтобы получить общее решение неоднородного уравнения

$$x''+p_1(t)\,x'+p_2(t)\,x=f(t), \tag{1.5}$$

нужно к (1.4) добавить частное решение (1.5)

$$x_1=\left(\exp\int_0^t\lambda_1 d\tau\right)\int_0^t\left[\exp\int_0^\tau(\lambda_2-\lambda_1)\,d\sigma\right]\left[\int_0^\tau f(\sigma)\exp\left(-\int_0^\sigma\lambda_2 du\right)d\sigma\right]d\tau.$$

В случае уравнений высших порядков соответствующая система (1.3) расширяется, причем в ней будут функции λ_1, λ_2, λ_3 и т. д. Следует отметить, что при исследовании разрешимости в замкнутом виде уравнения (1.1) аналогичные рассуждения проводили многие авторы (см., например, [5]).

Пусть уравнение (1.1) имеет вид

$$x''+[\delta^2+\varepsilon p(t)]\,x=0, \tag{1.6}$$

где $p(t)$ — периодическая функция периода $T\neq\frac{\pi}{\delta}$, ε — малый параметр. Система (1.3) в этом случае примет вид

$$\begin{aligned} &\lambda_1+\lambda_2=0, \\ &\lambda_1\lambda_2-\lambda_1'=\delta^2+\varepsilon p(t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Функции λ_1, λ_2 ищем соответственно в виде

$$\lambda_1(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(t)\,\varepsilon^k,\qquad \lambda_2(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(t)\,\varepsilon^k, \tag{1.8}$$

где α_k, β_k — комплексные функции действительного переменного t, причем α_0, β_0 будем искать постоянными.

Подставляя функции (1.8) в (1.7), получим

$$\alpha_0+\beta_0=0,\qquad \alpha_1+\beta_1=0,\qquad \alpha_0\beta_0=\delta^2,\qquad \alpha_1'+2\alpha_0\alpha_1=-p(t), \tag{1.9}$$

$$\alpha_n+\beta_n=0,\qquad \alpha_n'+2\alpha_0\alpha_n=f_{n-1},\qquad n=2,3,\ldots, \tag{1.10}$$

где $f_{n-1}(t)$ является комбинацией функций α_k, β_k, $k=1,2,\ldots,n-1$, а именно

$$f_{n-1}(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\beta_{n-k}.$$

Теперь из (1.9) имеем $\alpha_0 = i\delta$, $\beta_0 = -i\delta$. А поэтому (1.10) примет вид

$$\begin{aligned} &\alpha_n + \beta_n = 0, \\ &\alpha_n' + 2i\delta\alpha_n = f_{n-1}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Далее полагаем $f_{n-1} = g_{n-1} + ih_{n-1}$, $\alpha_n = u_n + iv_n$, тогда $\beta_n = -u_n - iv_n$.
Теперь из (1.11) получим окончательно

$$\begin{aligned} u_n' &= 2\delta v_n + g_{n-1}, \\ v_n' &= -2\delta u_n + h_{n-1}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Решая последовательно системы (1.12), найдем функции $u_n(t)$, $v_n(t)$, а вместе с тем и функции $\lambda_1(t, \varepsilon)$, $\lambda_2(t, \varepsilon)$. Обозначая $\int_0^t u_n d\tau$, $\int_0^t v_n d\tau$ соответственно через $\psi_n(t)$, $\varphi_n(t)$, получим комплексное решение уравнения (1.6)

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = (\exp\psi)[\cos(\delta t + \varphi) + i\sin(\delta t + \varphi)],$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t)\varepsilon^k, \quad \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\varepsilon^k.$$

Далее выпишем пару действительных решений

$$x_1 = \exp\psi(t, \varepsilon)\cos[\delta t + \varphi(t, \varepsilon)],$$

$$x_2 = \exp\psi(t, \varepsilon)\sin[\delta t + \varphi(t, \varepsilon)].$$

Общее решение примет вид

$$x = (\exp\psi)[c_1\cos(\delta t + \varphi) + c_2\sin(\delta t + \varphi)]. \tag{1.13}$$

Этим методом можно исследовать и резонансный случай.
Теперь в качестве примера рассмотрим уравнение Матье

$$x'' + (\delta^2 + \varepsilon\cos 2t)x = 0, \quad \delta \neq k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

и найдем несколько приближений.
Имеем

$$u_1' = 2\delta v_1 - \cos 2t, \quad v_1' = -2\delta u_1.$$

Отсюда

$$u_1 = \frac{1}{2(\delta^2 - 1)}\sin 2t, \quad v_1 = \frac{\delta}{2(\delta^2 - 1)}\cos 2t,$$

$$\psi_1 = \frac{1}{4(\delta^2 - 1)}(1 - \cos 2t), \quad \varphi_1 = \frac{\delta}{4(\delta^2 - 1)}\sin 2t.$$

Далее

$$u_2' = 2\delta v_2 + \frac{1}{8(\delta^2 - 1)} + \frac{\delta^2 + 1}{8(\delta^2 - 1)^2}\cos 4t,$$

$$v_2' = -2\delta u_2 - \frac{\delta}{4(\delta^2 - 1)^2}\sin 4t,$$

$$u_2 = -\frac{2\delta^2+1}{8(\delta^2-1)^2(\delta^2-4)}\sin 4t,$$

$$v_2 = -\frac{\delta(\delta^2+5)}{16(\delta^2-1)^2(\delta^2-4)}\cos 4t - \frac{1}{16\delta(\delta^2-1)}.$$

Причем

$$\psi_2 = \frac{2\delta^2+1}{32(\delta^2-1)^2(\delta^2-4)}(\cos 4t - 1),$$

$$\varphi_2 = -\frac{\delta(\delta^2+5)}{64(\delta^2-1)^2(\delta^2-4)}\sin 4t - \frac{t}{16\delta(\delta^2-1)}.$$

Общее решение уравнения Матье с точностью до ε^2 примет вид (1.13), причем

$$\psi(t,\varepsilon) = a(\delta,\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{4(\delta^2-1)}\cos 2t + \frac{(2\delta^2+1)\varepsilon^2}{32(\delta^2-1)^2(\delta^2-4)}\cos 4t,$$

$$a(\delta,\varepsilon) = \frac{1}{4(\delta^2-1)}\varepsilon - \frac{2\delta^2+1}{32(\delta^2-1)^2(\delta^2-4)}\varepsilon^2,$$

$$\varphi(t,\varepsilon) = b(\delta,\varepsilon)\,t + \frac{\delta\varepsilon}{4(\delta^2-1)}\sin 2t - \frac{\delta(\delta^2+5)\varepsilon^2}{64(\delta^2-1)^2(\delta^2-4)}\sin 4t,$$

$$b(\delta,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{16\delta(\delta^2-1)}.$$

Частота $\omega(\delta,\varepsilon)$ с точностью до ε^2 имеет вид

$$\omega(\delta,\varepsilon) = \delta - \frac{\varepsilon^2}{16\delta(\delta^2-1)}.$$

Вообще $\omega(\delta,\varepsilon)$ разлагается в ряд по степеням ε

$$\omega(\delta,\varepsilon) = \delta + \sum_{k=2}^{\infty}\omega_k(\delta)\,\varepsilon^k.$$

Отметим, что решения $(\exp\psi)\cos(\delta t+\varphi)$ и $(\exp\psi)\sin(\delta t+\varphi)$ являются соответственно четной и нечетной функциями Матье. Отсюда можно получить разложения решений в ряд Фурье, выделив предварительно гармоники $\cos\delta t$, $\sin\delta t$.

2. Нелинейные колебания. Теперь рассмотрим обобщенное уравнение нелинейных колебаний

$$x'' + \varepsilon f(x, x')\,x' + x = 0, \tag{2.1}$$

где $f(x, y)$ — целая аналитическая функция, т. е.

$$f(x,y) = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij}x^i y^j, \quad a_{ij} = \mathrm{const}.$$

Как и прежде, комплексное решение уравнения (2.1) ищем в виде $x = \exp\int_0^t \lambda_1(\tau)\,d\tau$. Тогда система (1.3) в нашем случае будет такой

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\varepsilon f\left(\exp\int_0^t\lambda_1 d\tau,\ \lambda_1\exp\int_0^t\lambda_1 d\tau\right), \quad \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1' = 1. \tag{2.2}$$

Далее полагаем

$$\lambda_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(t)\,\varepsilon^k, \quad \lambda_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t)\,\varepsilon^k, \tag{2.3}$$

причем α_0, β_0 ищем постоянными.

Подставляя (2.3) в (2.2) и сравнивая коэффициенты при степенях ε, получим

$$\alpha_0 + \beta_0 = 0, \quad \alpha_0\beta_0 = 1, \quad \alpha_0 = i, \quad \beta_0 = -i,$$

$$\alpha_n + \beta_n = q_{n-1}, \quad i(\alpha_n - \beta_n) - \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k\beta_{n-k} + \alpha_n' = 0$$

или

$$\alpha_n' + 2i\alpha_n = f_{n-1}, \tag{2.4}$$

где f_{n-1} определяется функциями α_k, q_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Пусть $\alpha_n = u_n(t) + iv_n(t)$, $f_{n-1} = g_{n-1}(t) + ih_{n-1}(t)$. Тогда из (2.4) по-получим

$$\begin{aligned} u_n' &= 2v_n + g_{n-1}, \\ v_n' &= -2u_n + h_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Решая последовательно системы (2.5), найдем $u_n(t)$, $v_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$

Комплексное решение уравнения (2.1) примет вид

$$\bar{x} = \exp[\psi + i(t + \varphi)],$$

где

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t)\,\varepsilon^k, \quad \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\,\varepsilon^k, \quad \psi_k = \int_0^t u_k\,d\tau, \quad \varphi_k = \int_0^t v_k\,d\tau.$$

Отсюда имеем два действительных решения

$$x_1 = (\exp\psi)\cos(t + \varphi), \quad x_2 = (\exp\psi)\sin(t + \varphi).$$

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$x'' + \varepsilon(1 - x^2)\,x' + x = 0.$$

Система (2.2) для этого уравнения имеет вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \varepsilon\left(\exp 2\int_0^t \lambda_1\,d\tau - 1\right),$$

$$\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1' = 1.$$

Так как $\alpha_0 = i$, $\beta_0 = -i$, то

$$\exp 2\int_0^t \lambda_1\,d\tau = \exp 2it \exp\left(2\varepsilon\int_0^t \alpha_1\,d\tau + 2\varepsilon^2\int_0^t \alpha_2\,d\tau + \ldots\right).$$

Тогда

$$\alpha_1 + \beta_1 = \exp 2it - 1,$$

$$i(\alpha_1 - \beta_1) + \alpha_1' = 0.$$

Теперь получим систему (2.5) при $n = 1$:

$$u_1' = 2v_1 - \sin 2t,$$

$$v_1' = -2u_1 + \cos 2t - 1.$$

Отсюда $u_1 = -\frac{1}{2}$, $v_1 = \frac{1}{2}\sin 2t$. Далее

$$\psi_1 = -\frac{1}{2}t, \quad \varphi_1 = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t).$$

Стало быть, в первом приближении имеем

$$x_1 = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}t\right)\cos\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\sin^2 t\right),$$

$$x_2 = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}t\right)\sin\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\sin^2 t\right).$$

Если это уравнение решать методом Крылова — Боголюбова, то в первом приближении получим [2, стр. 70].

$$x(t, \varepsilon) = \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}t\right)\left[1 + \frac{1}{4}(\exp(-\varepsilon t) - 1)\right]^{-\frac{1}{2}}\cos t.$$

Предложенным способом можно решать и уравнения вида

$$x'' + [1 + \varepsilon f(x)]\, x = 0,$$

где $f(x)$ — целая аналитическая функция x. Система (1.3) в этом случае имеет вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1' = 1 + \varepsilon f\left(\exp\int_0^t \lambda_1 d\tau\right).$$

Рассмотрим конкретное уравнение

$$x'' + \varepsilon x^3 + x = 0.$$

Его решение с точностью до ε^2 выглядит так

$$x_1 = (\exp\psi)\cos(t + \varphi), \quad x_2 = (\exp\psi)\sin(t + \varphi),$$

где

$$\psi = \varepsilon\sin^2 t + \frac{3}{8}\varepsilon^2\sin^2 2t,$$

$$\varphi = \frac{3}{4}\varepsilon\sin 2t + \frac{1}{4}\varepsilon^2\left(-\frac{15}{4}t + \sin 2t + \frac{13}{16}\sin 4t\right).$$

Как видим, секулярные члены здесь отсутствуют. В то же время решение этого уравнения, построенное методом Пуассона [2, стр. 11], уже в первом приближении содержит секулярный член.

Таким образом, изложенный выше способ может оказаться эффективным при решении ряда задач прикладного характера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во АН БССР, Минск, 1963.
2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. Дж. Хейл, Колебания в нелинейных системах, «Мир», М., 1966.
4. С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко, Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, «Наукова думка», К., 1966.
5. Ф. И. Сафронов, Об интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка в конечном виде, Сб. Научн. тр. Владимирского веч. политехн. ин-та, Владимир, 1967.

Поступила 15.XI 1968 г.,
после переработки — 15.V 1969 г.
Могилевский машиностроительный институт